

**MS-A0401 / MS-A0402****Tentti, 25.5.2018 klo 13.00-16.00****Aalto-yliopisto**

Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä taulukkokirjoja.
Ratkaise kaikki kuusi tehtävää, kukin niistä on kuuden pisteen arvoinen.

Merkitse tehtäväpaperiin se kurssikoodi, jonka tenttiin olet ilmoittautunut: MS-A0401 oli syksyllä, MS-A0402 keväällä.

Tehtävä 1: Osoita, että kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$ pätee

$$(1 + 2 + 3 + \dots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3.$$

Tehtävä 2: Osoita, että joukot \mathbb{Z} ja $\{2n : n \in \mathbb{N}\}$ ovat yhtä mahtavia.

Tehtävä 3: Tarkastellaan kirjaimista A, B, C, D, E, F muodostettuja jonoja, joissa sama kirjain saa esiintyä useammankin kerran. Vastaa seuraaviin kysymyksiin muodossa, joka syötettäisiin laskimeen (esim. $456! \cdot 789$). Perustele vastauksesi lyhyesti.

- Monessako viiden pituisessa jonossa ensimmäisenä ja viimeisenä on kirjain A ?
- Montako sellaista viiden pituista jonoa on olemassa, jotka alkavat A :lla, mutta eivät lopu A :han, ja jotka eivät sisällä lainkaan F -kirjainta?
- Montako sellaista kuuden pituista jonoa on olemassa, joissa esiintyy kirjain A täsmälleen kahdesti?
- Montako sellaista kuuden pituista jonoa on olemassa, joissa esiintyy kirjain A täsmälleen kahdesti siten, että A -kirjaimet eivät ole vierekkäin?

Tehtävä 4: Olkoon G verkko, jolle $V(G) = \{1, 2, 3, \dots, 99, 100\}$ ja $(m, n) \in E(G)$ jos ja vain jos luku $m + n$ on pariton. Selvitä verkon G kromaattinen luku. Muista perustella vastauksesi huolellisesti.

Käännä!

Tehtävä 5: a) Mikä on jakojäännös, kun luku 4^{2018} jaetaan luvulla 7?

b) Määritä luvun 5 käänteisalkio joukossa \mathbb{Z}_{11} ja ratkaise yhtälö $5x \equiv 9$ joukossa \mathbb{Z}_{11} .

Tehtävä 6: Olkoon $f = (1\ 2\ 3)(4\ 5)(6) \in S_6$. Tarkastellaan ryhmän $G = \langle f \rangle \subseteq S_6$ toimintaa joukossa $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Määritä

- permutaation f matriisiesitys
- luvun 4 rata
- luvun 3 kiinnittäjäaliryhmä
- permutaation f^4 kiintopisteiden joukko.