

## TENTTI, DISKREETIN MATEMATIIKAN PERUSTEET, MS-A0401

- **Aika:** 12.12.2019, 16:30 - 19:30
- **Apuvälineet:** Yksi sivu (A4) opiskelijan itse käsin kirjoittamia muistiinpanoja, merkattu opiskelijan nimellä.
- Kirjoita eri tehtävien vastaukset eri sivuille.
- Perustele vastauksesi huolella. Perustelemattomista vastauksista ei saa pisteitä.

### TEHTÄVÄ 1

[1p / osa] Ovatko seuraavat lauseet tautologioita vai ei?

- $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$ .
- $(P \wedge Q) \rightarrow (P \vee Q)$ .
- $((P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)) \rightarrow (P \rightarrow Q)$ .
- $\forall x : x = x$ .

### TEHTÄVÄ 2

[1p / osa] Ovatko seuraavat relaatiot joukossa  $\mathbb{R}$  ekvivalenssirelatioita vai ei?

- $A(x, y)$  jos  $x - y$  on parillinen kokonaisluku.
- $B(x, y)$  jos  $x - y$  on pariton kokonaisluku.
- $C(x, y)$  jos  $x \leq y$ .
- $D(x, y)$  jos  $-1 \leq x - y \leq 1$ .

### TEHTÄVÄ 3

- [1p] Osoita induktioperiaatteen nojalla, että kaikille  $n \in \mathbb{N}$  pätee

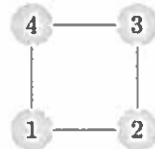
$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

- [3p] Osoita induktioperiaatteen nojalla, että kaikille  $n \in \mathbb{N}$  pätee

$$\left( \sum_{k=1}^n k \right)^2 = \sum_{k=1}^n k^3.$$

### TEHTÄVÄ 4

*Dihedraaliryhmä*  $D_4$  koostuu niistä permutaatioista  $\sigma \in S_4$ , jotka kuvaavat alla olevan neliön takaisin samaksi neliöksi. (Esimerkiksi  $\sigma = (12) \notin D_4$ , sillä pisteiden 2 ja 3 välillä on särmä, kun taas pisteiden  $\sigma(2) = 1$  ja  $\sigma(3) = 3$  välillä ei ole särmää.)



- [1p] Montako permutaatiota ryhmässä  $D_4$  on?
- [2p] Osoita, että kaikki ryhmän  $D_4$  permutaatiot voi kirjoittaa rotaation  $\rho = (1234)$  ja peilauksen  $\pi = (13)$  tulona.
- [1p] Päteekö

$$\forall \sigma, \tau \in D_4 : \sigma\tau = \tau\sigma?$$

(Jos tämä pätee, niin ryhmää kutsutaan *kommutatiiviseksi*.)

### TEHTÄVÄ 5

[4p] Ratkaise Diofantoksen yhtälö

$$224x + 49y = 14, \quad x, y \in \mathbb{Z}.$$