

## MS-A0409 Grundkurs i Diskret Matematik

Sluttentamen ~~10.11.2015~~ 9.9.2016

Fyll i tydligt på varje svarpapper samtliga uppgifter. På förhörskod och -namn skriv kursens kod, namn samt slutförhör eller mellanförhör med ordningsnummer. Examenprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KTA, KON, MAR, MTE, PUU, RRT, TFM, TIK, TLT, TUO, YYT.

Vid denna tentamen får varken räknare eller tabellsamlingar användas.

Fråga om ni misstänker att det förekommer något tryckfel! Tentamenstiden är 3 timmar.

- $\mathbf{Z}^3 = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$  är mängden av ordnade heltals-tripplar, så t.ex.  $(17, -4711, 0) \in \mathbf{Z}^3$ .  
 $P = \{(a, b, c) \in \mathbf{Z}^3 \mid a^2 + b^2 = c^2\}$ , så  $P \subset \mathbf{Z}^3$  och t.ex.  $(3, -4, 5) \in P$ , men  $(2, 3, 4) \notin P$ .  
 $T = \{(p, q, r) \mid \exists x, y \in \mathbf{Z} : p = x^2 - y^2, q = 2xy, r = x^2 + y^2\}$ .  
Visa att  $T \subseteq P$ , men  $T \neq P$ . ( $T$  är alltså en äkta delmängd av  $P$ .)
- Hur många 10-siffriga tal (skrivna på vanligt sätt i basen 10) innehåller exakt 3 sexor och inga nollor?  
Svaret får innehålla potenser, faktorer och binomial-koefficienter, men inga variabler.
- Använd Euklides' algoritm för att bestämma största gemensamma delaren  $\text{sgd}(119, 161)$  av talen 119 och 161 (redovisa mellanstegen!) och skriv  $\text{sgd}(119, 161)$  som en linjär kombination av 119 och 161, dvs på formen  $\text{sgd}(119, 161) = \alpha \cdot 119 + \beta \cdot 161$  med lämpliga heltal  $\alpha$  och  $\beta$  genom att använda Euklides' algoritm baklänges.
- Visa att  $n^5 - n$  är jämnt delbar med 30 för alla heltal  $n \in \mathbf{Z}$ .
- De 9 teknologerna A, B, C, D, E, F, G, H och I skulle vardera skriva två resttentamina: A för kurserna 1&2, B för 1&4, C för 1&6, D för 2&3, E för 3&4, F för 3&5, G för 5&6, H för 4&7 och I för kurserna 5&7. Den anordnande assistenten vill reservera så få tentamenstillfällen som möjligt, dock så att om en person skall tentera två kurser, får kursernas tentamina inte vara samtidigt.  
Rita en graf med 7 noder, en för varje kurs, och sammanbind två noder med en båge, om det finns någon person, som tenterar bägge kurserna. Färga sedan noderna så grannar har olika färg. Vad är minimala antalet färger, dvs. grafens kromatiska tal? Detta anger hur många olika tentamenstider måste reserveras.

### Nyttiga (?) formler:

$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ ,  $\mathbf{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ ,

$0! = 1$ ,  $n! = n \cdot (n-1)!$  för  $n \in \mathbf{N} \Rightarrow m! = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$  för  $m \in \mathbf{N}$ ,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \text{ för } n, k \in \mathbf{N} \cup \{0\}, k \leq n.$$