

MS-A0409 Grundkurs i Diskret Matematik

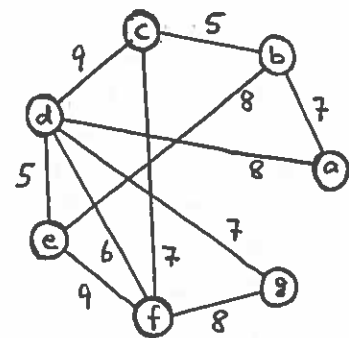
Kurstentamen, Lucia-dagen 2018

Fyll i tydligt på varje svarpapper samtliga uppgifter. På förhörskod och -namn skriv kursens kod, namn samt slutförhör eller mellanförhör med ordningsnummer. Examenprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KTA, KON, MAR, MTE, PUU, RRT, TFM, TIK, TLT, TUO, YYT.

Vid denna tentamen får varken räknare eller tabellsamlingar användas.

Fråga om ni misstänker att det förekommer något tryckfel! Tentamenstiden är 3 timmar.

1. Visa mha. induktion att $\prod_{k=1}^n (1 + \frac{1}{k})^k = (1 + \frac{1}{1})^1 \cdot (1 + \frac{1}{2})^2 \cdot \dots \cdot (1 + \frac{1}{n})^n = \frac{(n+1)^n}{n!}$ för alla $n \in \mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Skriv ut explicit vilket induktionsantagande som görs samt var det används i beviset av induktionssteget! (6p.)
2. På hur många sätt kan man ordna siffrorna 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 och 9 om man kräver att det mellan två jämna siffror alltid skall finnas minst en udda siffra? (6p.)
3. Ett mindre universitet tilldelar sina studerande studienummer på formen $Kabcde$, där $abcde$ är ett femsiffrigt tal $\in \{00000, 00001, \dots, 99999\}$ och $K \in \{1, 2, \dots, 9\}$ är en kontrollsiffra som bestäms av att $1 \cdot K + 2 \cdot a + 4 \cdot b + 5 \cdot c + 7 \cdot d + 8 \cdot e \equiv_9 0$.
 - a) Bestäm kontrollsiffran K i studienumret $K12345$. (3p.)
 - b) Bestäm den otydliga siffran x i studienumret $47x835$. (3p.)
4. a) Bestämmer ett minimalt uppspannande träd för den vikta grafen till höger antingen mha. Primts giriga algoritm eller mha. Kruskals giriga algoritm. (3p.)
b) Strunta nu i bågarnas vikter och bestäm det kromatiska talet hos grafen, dvs. det minsta antalet färger med vilket noderna i grafen kan färgas så att grannoder alltid har olika färg. Ge ett exempel på en sådan färgning och förklara varför det inte är möjligt med färre färger. (3p.)
5. a) På hur många icke-ekvivalenta sätt kan man färga hörnen hos en regelbunden femhörning med upp till fyra färger, då femhörningen kan vridas fritt i planet? (3p.)
b) På hur många icke-ekvivalenta sätt kan man färga hörnen hos en regelbunden femhörning med upp till fyra färger, då femhörningen kan vridas fritt i rummet. (3p.)



Nyttiga (?) formler:

$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, $\mathbf{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$,

$0! = 1$, $n! = n \cdot (n-1)!$ för $n \in \mathbf{N} \Rightarrow m! = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$ för $m \in \mathbf{N}$,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \text{ för } n, k \in \mathbf{N} \cup \{0\}, k \leq n.$$