

MS-A0409 Grundkurs i Diskret Matematik

Kurstentamen, Lucia-dagen 2018

Fyll i tydligt på varje svarpapper samtliga uppgifter. På förhörskod och -namn skriv kursens kod, namn samt slutförhör eller mellanförhör med ordningsnummer. Examenprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KTA, KON, MAR, MTE, PUU, RRT, TFM, TIK, TLT, TUO, YYT.

Vid denna tentamen får varken räknare eller tabellsamlingar användas.

Fråga om ni misstänker att det förekommer något tryckfel! Tentamenstiden är 3 timmar.

Observera, att olika deluppgifter kan ge olika antal poäng.

1. Osoita induktion avulla että $\prod_{k=1}^n (1 + \frac{1}{k})^k = (1 + \frac{1}{1})^1 \cdot (1 + \frac{1}{2})^2 \cdot \dots \cdot (1 + \frac{1}{n})^n = \frac{(n+1)^n}{n!}$ kaikilla $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Kirjoita eksplisiittisesti mikä on induktio-oletuksesi ja missä käytät sitä induktioaskelen todistuksessa. (6p.)

2. Kuinka monella tavalla voi järjestää numerot 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ja 9, jos kahden parillisen numeron välissä pitäisi aina olla vähintään yksi pariton numero? (6p.)

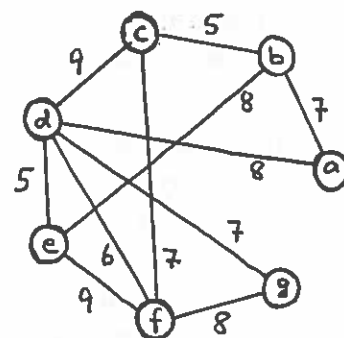
3. Eräs pieni yliopisto antaa jokaiselle opiskelijalle opintonumeron muotoa $Kabcde$, missä $abcde$ on viisinumeroinen luku $\in \{00000, 00001, \dots, 99999\}$ ja $K \in \{1, 2, \dots, 9\}$ on sellainen tarkistusnumero, että $1 \cdot K + 2 \cdot a + 4 \cdot b + 5 \cdot c + 7 \cdot d + 8 \cdot e \equiv_9 0$.

a) Määritä tarkistusnumero K opintonumerossa $K12345$. (3p.)

b) Määritä epäselvä numero x opintonumerossa $47x835$. (3p.)

4. a) Määritä oikealla olevan verkon minimaalinen virittävä puu käyttäen joko Primin tai Kruskalin ahnetta algoritmia. (3p.)

b) Unohda nyt kaarten painot ja määritä verkon kromaattinen luku, eli pienin lukumäärä värejä, joilla voidaan värittää verkon solmut niin, että naapurisolmuilla on aina eri värit. Anna esimerkki tällaisesta värityksestä ja selitä, miksi se ei onnistu vähemmällä väreillä. (3p.)



5. a) Montako olennaisesti erilaista tapaa on värittää säännöllisen viisikulmion kulmat enintään neljällä eri värillä, jos viisikulmio liikkuu tasossa? (3p.)

b) Montako olennaisesti erilaista tapaa on värittää säännöllisen viisikulmion kulmat enintään neljällä eri värillä, jos viisikulmio liikkuu avaruudessa? (3p.)

Nyttiga (?) formler:

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$,

$0! = 1$, $n! = n \cdot (n-1)!$ för $n \in \mathbb{N} \Rightarrow m! = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$ för $m \in \mathbb{N}$,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \text{ för } n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, k \leq n.$$