Institutionen för matematik och systemanalys
Aalto-universitetet, högskolan för teknikvetenskaper

Metsalo

# MS-A0409 Grundkurs i Diskret Matematik

## Kurstentamen, 2019-12-12

Fyll i tydligt *på varje svarpapper* samtliga uppgifter. På *förhörskod och -namn* skriv kursens kod, namn samt *slutförhör* eller *mellanförhör* med ordningsnummer. Examenprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KTA, KON, MAR, MTE, PUU, RRT, TFM, TIK, TLT, TUO, YYT.

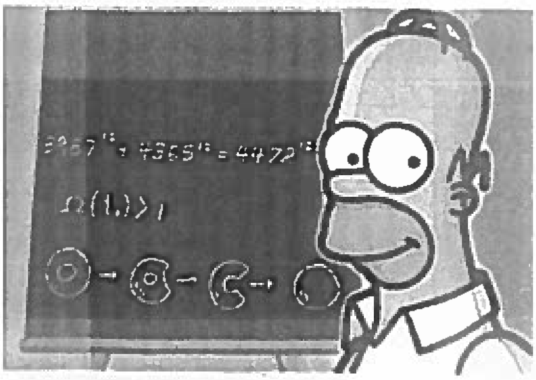
Denna tentamen består av fyra fritt valda uppgifter av nedanstående fem uppgifter.
Om alla fem uppgifterna attackeras, tas de fyra bästa resultaten med i beräkningen.

Vid denna tentamen får varken räknare eller tabellsamlingar användas.
Fråga om ni misstänker att det förekommer något tryckfel! Tentamenstiden är 3 timmar.
Observera, att olika deluppgifter kan ge olika antal poäng. På baksidan finns några formler givna.

1. a) Visa mha. induktion att $\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Skriv ut explicit vilket induktionsantagande som görs samt var det används i beviset av induktionssteget! (3p.)
   b) Visa mha. induktion att $(\sum_{k=1}^{n} k)^2 = \sum_{k=1}^{n} k^3$, $\forall n \in \mathbb{N}$, dvs. att $(1+2+\ldots+n)^2 = 1^3+2^3+\ldots+n^3$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Skriv åter ut explicit vilket induktionsantagande som görs samt var det används i beviset av induktionssteget! (3p.)

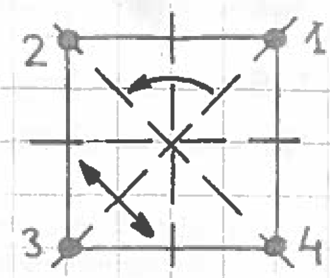
2. En vanlig kortlek består av 52 kort, uppdelade i fyra färger (hjärter $\heartsuit$ och ruter $\diamondsuit$, som är röda samt spader $\spadesuit$ och klöver $\clubsuit$, som är svarta). Varje färg har 13 kort med olika valör (Ess, Kung, Dam, Knekt, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3 och 2).
   a) En färgstege i poker (även känd som en straight flush) består av en hand med fem kort av samma färg och konsekutiva valörer i godtycklig ordning, där Ess kan räknas antingen som kortet med valör strax över Kungen eller strax under 2, så 4,7,8,5,6 i ruter, Ess,3,4,2,5 i hjärter och Knekt,Dam,Ess,10,Kung i spader är exempel på färgstegar, medan Kung,Ess,2,3,4 i klöver inte är det. På hur många sätt kan en färgstege bildas av de 52 korten? (2p.)
   b) En färg i poker (även känd som en flush) består av en hand med fem kort av samma färg i godtycklig ordning, som inte bildar en färgstege. På hur många sätt kan en färg bildas av de 52 korten? (4p.)

3. a) Vi söker naturliga tal $m \in \mathbb{N}$ sådana att $m!+5 = n^3$ för något heltal $n$. Ett exempel är $m = 5 \Rightarrow n = 5$, eftersom $5!+5 = 125 = 5^3$. Visa att detta är enda lösningen. (3p.)
   Gott råd: Arbeta modulo 7.
   b) Fermats stora sats (Fermat's Last Theorem; FLT) säger att ekvationen $a^n + b^n = c^n$ saknar lösningar bland de naturliga talen $\mathbb{N}$, om $n > 2$. (Då $n \leq 2$ finns t.ex. lösningarna $2^1 + 2^1 = 4^1$ och $8^2 + 15^2 = 17^2$.) Homer Simpson påstår sig ha hittat ett motexempel: $3987^{12}+4365^{12} = 4472^{12}$. Visa att detta inte stämmer. (3p.)



**Var god vänd.**

4. Gruppen $D_4$ är symmetrigruppen för en kvadrat, vilket också kan ses som gruppen av permutationer av kvadratens hörn, som avbildar grannar på grannar. Dessa permutationer är 8 till antalet: 4 är vridningar i planet med vinkeln $k \cdot 90°$ moturs ($k = 0$ svarar mot identitetspermutationen $(1)$, som också kan skrivas som $(1)(2)(3)(4)$, $k = 1$ svarar mot permutationen $(1\,2\,3\,4)$ i figuren till höger) och 4 är vändningar i rummet längs den horisontella eller vertikala linjen i figuren eller kring någon diagonal (vändningen längs diagonalen genom hörnen 1 och 3 svarar mot permutationen $(2\,4)$, som också kan skrivas som $(1)(2\,4)(3)$).




a) Ange även de övriga 5 permutationerna i $D_4$ på cykelform. (1p.)
b) Visa att $D_4$ inte är en kommutativ grupp. (1p.)
c) Beräkna gruppens cykelindex. (2p.)
d) Bestäm på hur många icke-ekvivalenta sätt man kan färga hörnen hos en kvadrat med upp till fyra färger, om kvadraten kan vridas fritt i rummet. (2p.)

5. Två mängder $A$ och $B$ säges ha samma kardinalitet (beteckning: $|A| = |B|$), om det existerar en bijektion $f : A \to B$. Om det existerar en injektion $g : A \to B$ men inte någon injektion $h : B \to A$, säges $B$ ha högre kardinalitet än $A$ (beteckning: $|A| < |B|$) och om det existerar en injektion $h : B \to A$ men inte någon injektion $g : A \to B$, säges $A$ ha högre kardinalitet än $B$ (beteckning: $|A| > |B|$).
a) Förklara varför de naturliga talen $\mathbb{N}$ och de rationella talen $\mathbb{Q}$ har samma kardinalitet, dvs. varför $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$. (3p.)
b) Förklara varför de reella talen $\mathbb{R}$ har högre kardinalitet än de naturliga talen $\mathbb{N}$, dvs. varför $|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$. (3p.)

**Nyttiga (?) formler:**

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$,
$0! = 1, n! = n \cdot (n-1)!$ för $n \in \mathbb{N} \Rightarrow m! = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ för $m \in \mathbb{N}$,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \text{ för } n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, k \leq n.$$