

**Ohje:** Vastaa lyhyesti ja ytimekkäästi, mutta perustele ratkaisusi. Pelkkä lukuarvo vastauksena ei anna pisteitä. Kokeessa on 4 tehtävää, jokaisesta saa 0–6 pistettä. Merkitse jokaiseen vastauspaperiin:

- Kurssin nimi ja koodi
- SUKUNIMI, ETUNIMET ja OPISKELIJANUMERO (tikkukirjaimin)
- Koulutusohjelma ja vuosikurssi
- Päivämäärä ja nimikirjoitus

**Sallitut apuvälineet:** Laskin ja A4-muistilappu (käsin kirjoitettu, tekstiä vain toisella puolella, oikeassa yläkulmassa oma nimi, ei tarvitse palauttaa)

---

**T1** Skeptiikan tentissä on neljä kysymystä, joihin vastataan valitsemalla toinen kahdesta vastausvaihtoehdosta. Jokaisesta oikeasta vastauksesta saa yhden pisteen. Tenttiin osallistuu ahkeria ja laiskoja opiskelijoita. Ahkera opiskelija on valmistautunut tenttiin huolellisesti ja vastaa kuhunkin tehtävään oikein muista tehtävistä riippumatta todennäköisyydellä 0.9, kun taas laiska opiskelija vastaa jokaiseen kysymykseen umpimähkään tasaisen satunnaisesti. Kurssipalautteen perusteella tentin järjestäjä arvioi, että ahkerien opiskelijoiden osuus tenttiin osallistujista on  $2/3$ .

- (a) Millä todennäköisyydellä ahkera opiskelija saa tentistä tasan 2 pistettä? (2p)
- (b) Millä todennäköisyydellä satunnainen opiskelija saa tentistä tasan 2 pistettä? (2p)
- (c) Millä todennäköisyydellä tentistä tasan 2 pistettä saanut opiskelija on laiska? (2p)

**T2** Toimiston kahvitermoksessa on kahvitauon alkaessa 4,5 litraa kahvia. Yksittäisen työntekijän tauon aikana tarvitseman kahvin määrän odotusarvo on 0.2 litraa keskihajonnan ollessa 0.05 litraa, ja eri työntekijöiden tarvitsemat kahvimäärät voidaan olettaa toisistaan riippumattomiksi.

- (a) Laske 25 työntekijän yhteensä tarvitseman kahvimäärän odotusarvo ja keskihajonta. (2p)
- (b) Onko yo. tietojen pohjalta mahdollista laskea, millä todennäköisyydellä yksittäinen työntekijä tarvitsee kahvia vähintään 0.3 litraa? Jos on, ilmoita vastaus. Jos ei, selitä miksi ei. (1p)
- (c) Laske normaaliapproksimaation avulla arvio todennäköisyydelle, että termoksessa oleva kahvi riittää 25 työntekijälle. (1p)
- (d) Arvioi normaaliapproksimaatiota käyttäen, kuinka paljon kahvia termoksessa pitäisi olla tauon alussa, jotta sitä riittäisi 25 työntekijälle vähintään 99% todennäköisyydellä? (1p)
- (e) Mitkä ylläolevista laskelmista pitävät paikkansa myös silloin, kun eri työntekijöiden tarvitsemien kahvimäärien riippumattomuusoletuksesta luovutaan? (1p)

**T3** Eri matkustuspäivien odotusajat (min) eräällä bussipysäkillä ovat toisistaan riippumattomia ja noudattavat jatkuvan välin  $[0, \theta]$  tasajakaumaa tiheysfunktiona

$$f(t|\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}, & 0 \leq t \leq \theta. \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

Viitenä eri matkustuspäivänä on havaittu odotusajat  $x_1 = 5$ ,  $x_2 = 10$ ,  $x_3 = 2$ ,  $x_4 = 3$  ja  $x_5 = 8$ . Auta Ronaldia, Karlia ja Thomasia estimoimaan parametrin  $\theta$  arvo näiden havaintojen pohjalta.

(a) Ronald päättää käyttää suurimman uskottavuuden estimaattia. Laske tämän estimaatin arvo datajoukolla  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_5)$ . (2p)

(b) Karlin käyttämän estimaatin arvo määräytyy ratkaisemalla  $\theta$  yhtälöstä

$$\mathbb{E}(X|\theta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i,$$

jonka vasemmalla puolella on jakaumaa  $f(t|\theta)$  noudattavan satunnaismuuttujan odotusarvo ja oikealla puolella havaintojen keskiarvo. Laske tämän estimaatin arvo datajoukolla  $\vec{x}$ . (2p)

(c) Thomas tulkitsee tuntemattoman parametrin satunnaismuuttujaksi  $\Theta$  ja valitsee priorijakauman tiheysfunktiksi

$$f_0(\theta) = \begin{cases} \theta^{-2}, & \theta \geq 1, \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

Thomas päättää käyttää estimaattina  $\Theta$ :n posteriorijakauman odotusarvoa. Laske tämän estimaatin arvo datajoukolla  $\vec{x}$ . (2p)

**T4** Datalähteen tiedetään tuottavan riippumattomia normaalijakautuneita satunnaislukuja odotusarvona  $\mu$  (tuntematon) ja keskihajontana  $\sigma = 2$ . Datalähteestä on kerätty  $n = 100$  havaintoa. Testaa 5% merkitsevyystasolla nollahypoteesia  $H_0 : \mu = 3$  suhteessa vastahypoteesiin  $H_1 : \mu \neq 3$ . Käytä testisuuretta

$$t(x) = \frac{m(x) - 3}{\sigma/\sqrt{n}},$$

missä  $m(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$  on havaitun datajoukon keskiarvo.

(a) Määritä testisuureen p-arvo datajoukolla, jonka keskiarvo on 3.6. (2p)

(b) Mikä on testin johtopäätös (a)-kohdan havainnolle? (1p)

(c) Määritä nollahypoteesin hylkäämiseen johtavien testisuureen arvojen joukko. (1p)

(d) Määritä testin hyväksymisvirheen todennäköisyys, kun tuntemattoman parametrin todellisen arvon tiedetään olevan  $\mu = 3.2$ . *Huom. riippumattomien normaalijakautuneiden satunnaismuuttujien keskiarvo on myös normaalijakautunut.* (2p)

## Normaalijakauman taulukko

Allaolevaan taulukkoon on koottu lukuarvoja normitetun normaalijakauman kertymäfunktiolle

$$F_Z(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt.$$

$x$	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999