

MS-A0509 Grundkurs i sannolikhetskalkyl och statistik

Sluttentamen, 3.4.2018

Fyll i tydligt på varje svarpapper samtliga uppgifter. På förhörskod och -namn skriv kursens kod, namn samt slutförhör eller mellanförhör med ordningsnummer. Examenprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KTA, KON, MAR, MTE, PUU, RRT, TFM, TIK, TLT, TUO, YYT.

Till denna tentamen får medtagas en **minneslapp** (handskriven på bara ena sidan av ett A4 papper, försedd med studienummer, namn och namnteckning), en av Studentexamensnämnden godkänd räknare samt skrivdon. Observera, att olika (del-)uppgifter kan ge olika poäng. Fråga om ni misstänker att det förekommer något tryckfel! Tentamenstiden är 3 timmar.

1. En vanlig kortlek består av 52 kort, uppdelade i fyra färger (hjärter ♥ och ruter ♦, som är röda samt spader ♠ och klöver ♣, som är svarta). Varje färg har 13 kort med olika valör (Ess, Kung, Dam, Knekt, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3 och 2).
Beräkna sannolikheten (exakta värdet) att få alla fyra färgerna, då man drar fyra kort ur en kortlek utan återläggning. (3p.)
2. En urna innehåller 9 bollar: 5 röda, 3 gula och 1 grön. Vi plockar slumpmässigt ut två bollar ur urnan utan återläggning. Låt den diskreta slumpvariabeln X vara antalet gröna bollar som plockats ut (så $X \in \{0, 1\}$) och den diskreta slumpvariabeln Y vara antalet röda bollar som plockats ut (så $Y \in \{0, 1, 2\}$).
 - a) Beräkna väntevärdet och standardavvikelsen för X resp. Y . (1p.+1p.+1p.+1p.)
 - b) Nu studerar vi den två-dimensionella slumpvariabeln (X, Y) . Beräkna dess frekvensfunktion $p_{X,Y}(x, y)$. (3p.)
 - c) Beräkna kovariansen $Cov(X, Y)$ för (X, Y) . (2p.)
3. Låt slumpvariabeln S vara antalet gånger vi drar en spader, om vi drar kort med återläggning 300 gånger ur en vanlig kortlek. Använd normalapproximationen för att approximera sannolikheten att $72 \leq S \leq 80$. Ge denna (approximativa) sannolikhet avrundad till två decimaler. (6p.)
4. Visa att om X är en normalfördelad slumpvariabel ($X \sim N(\mu, \sigma^2)$) och vi tar ett stickprov $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, så är momentskattningen $\widehat{\mu}_{MM}$ av väntevärdet μ stickprovsmedelvärdet $\bar{X} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n X_i$, medan momentskattningen $\widehat{\sigma}_{MM}^2$ av variansen σ^2 är $\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ (3p.+3p.).
5. Saltsyrehalten i en lösning skulle bestämmas. Därför utfördes 4 mätningar, som gav följande resultat (i g/l): 108, 96, 96, 104.
Mätningarna är (som synes) behäftade med mätfel, som vi kan anta är normalfördelade med väntevärdet 0g/l (dvs. inget systematiskt fel) och med en okänd varians σ^2 .
Bestäm ett tvåsidigt 0.95 konfidensintervall för lösningens saltsyrehalt. (6p.)

Se även formlerna och tabellerna på in- och baksidan.

Nyttiga (?) formler:

$N = \{1, 2, 3, \dots\}$, $Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$,

$0! = 1, n! = n \cdot (n-1)!$ för $n \in N \Rightarrow m! = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$ för $m \in N$,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \text{ för } n, k \in N \cup \{0\}, k \leq n.$$

Några diskreta fördelningar (utan närmare förklaringar):

$X \sim \text{Geom}(p) : \Pr(X = k) = p \cdot (1-p)^k \Rightarrow E[X] = \frac{1}{p}, \text{Var}X = \frac{1-p}{p^2}$

$X \sim \text{Bin}(n, p) : \Pr(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \Rightarrow E[X] = np, \text{Var}X = np(1-p)$

$X \sim \text{Po}(m) : \Pr(X = k) = \frac{e^{-m} \cdot m^k}{k!} \Rightarrow E[X] = m, \text{Var}X = m$

Några kontinuerliga fördelningar (utan närmare förklaringar):

$Y \sim \text{Exp}(\lambda) : f_Y(y) = \lambda \cdot e^{-\lambda y} \Rightarrow E[Y] = \frac{1}{\lambda}, \text{Var}Y = \frac{1}{\lambda^2}$

$Y \sim N(0, 1) : f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-y^2/2} \Rightarrow E[Y] = 0, \text{Var}Y = 1$

Tilastolliset taulukot/Statistical Tables

N(0,1)

TAULUKKO 1.2.
TABLE 1.2.

STANDARDOITU NORMAALI AKAJUMA N(0,1)
STANDARD NORMAL DISTRIBUTION N(0,1)

Kertymäfunktion $\Phi(z)$ arvoja / Values of the cumulative distribution function $\Phi(z)$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998

Esimerkki / Example:

If $z = +0.49$, then $\Phi(z) = \Pr(Z \leq +0.49) = 0.6879$
 If $z = -0.49$, then $\Phi(z) = \Pr(Z \leq -0.49) = 0.3121$

TAULUKKO 2. t-DISTRIBUTION t(df)
TABLE 2. t-JAKAUMA t(df)

Kriittisiä arvoja / Critical values

Merkitsevyystaso 1-suuntaisissa testeissä / Significance level in 1-sided tests										
df	0.4	0.3	0.2	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
1	0.325	0.727	1.376	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	318.309	636.619
2	0.289	0.617	1.061	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.327	31.599
3	0.277	0.584	0.978	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.215	12.924
4	0.271	0.569	0.941	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5	0.267	0.559	0.920	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869
6	0.265	0.553	0.906	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	0.263	0.549	0.896	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	0.262	0.546	0.889	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	0.261	0.543	0.883	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781
10	0.260	0.542	0.879	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	0.260	0.540	0.876	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	0.259	0.539	0.873	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318
13	0.259	0.538	0.870	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
14	0.258	0.537	0.868	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
15	0.258	0.536	0.866	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	0.258	0.535	0.865	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015
17	0.257	0.534	0.863	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965
18	0.257	0.534	0.862	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610	3.922
19	0.257	0.533	0.861	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	0.257	0.533	0.860	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850
21	0.257	0.532	0.859	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527	3.819
22	0.256	0.532	0.858	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23	0.256	0.532	0.858	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485	3.768
24	0.256	0.531	0.857	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
25	0.256	0.531	0.856	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450	3.723
26	0.256	0.531	0.856	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707
27	0.256	0.531	0.855	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.690
28	0.256	0.530	0.855	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674
29	0.256	0.530	0.854	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396	3.659
30	0.256	0.530	0.854	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385	3.646
35	0.255	0.529	0.852	1.306	1.690	2.030	2.438	2.724	3.340	3.591
40	0.255	0.529	0.851	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307	3.551
45	0.255	0.528	0.850	1.301	1.679	2.014	2.412	2.690	3.281	3.520
50	0.255	0.528	0.849	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	3.261	3.496
55	0.255	0.527	0.848	1.297	1.673	2.004	2.396	2.668	3.245	3.476
60	0.254	0.527	0.848	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232	3.460
70	0.254	0.527	0.847	1.294	1.667	1.994	2.381	2.648	3.211	3.435
80	0.254	0.526	0.846	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	3.195	3.416
90	0.254	0.526	0.846	1.291	1.662	1.987	2.368	2.632	3.183	3.402
100	0.254	0.526	0.845	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	3.174	3.390
200	0.254	0.525	0.843	1.286	1.653	1.972	2.345	2.601	3.131	3.340
500	0.253	0.525	0.842	1.283	1.648	1.965	2.334	2.586	3.107	3.310
∞	0.253	0.524	0.842	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291
df	0.8	0.6	0.4	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01	0.002	0.001
Merkitsevyystaso 2-suuntaisissa testeissä / Significance level in 2-sided tests										

Esimerkki / Example:

jos $\alpha = 0.01$ ja $df = 11$, niin $Pr(t > 2.718) = 0.01$
if $\alpha = 0.01$ and $df = 11$, then $Pr(t > 2.718) = 0.01$

TAULUKKO 3. c²(df)-JAKAUMA
TABLE 3. c²(df)-DISTRIBUTION

Kriittisiä arvoja / Critical values

Merkitsevyystaso 1-suuntaisissa testeissä / Significance level in 1-sided tests								
df	0.999	0.99	0.95	0.9	0.1	0.05	0.01	0.001
1	0.000	0.000	0.004	0.016	2.706	3.841	6.635	10.828
2	0.002	0.020	0.103	0.211	4.605	5.991	9.210	13.816
3	0.024	0.115	0.352	0.584	6.251	7.815	11.345	16.266
4	0.091	0.297	0.711	1.064	7.779	9.488	13.277	18.467
5	0.210	0.554	1.145	1.610	9.236	11.070	15.086	20.515
6	0.381	0.872	1.635	2.204	10.645	12.592	16.812	22.458
7	0.598	1.239	2.167	2.833	12.017	14.067	18.475	24.322
8	0.857	1.646	2.733	3.490	13.362	15.507	20.090	26.124
9	1.152	2.088	3.325	4.168	14.684	16.919	21.666	27.877
10	1.479	2.558	3.940	4.865	15.987	18.307	23.209	29.588
11	1.834	3.053	4.575	5.578	17.275	19.675	24.725	31.264
12	2.214	3.571	5.226	6.304	18.549	21.026	26.217	32.909
13	2.617	4.107	5.892	7.042	19.812	22.362	27.688	34.528
14	3.041	4.660	6.571	7.790	21.064	23.685	29.141	36.123
15	3.483	5.229	7.261	8.547	22.307	24.996	30.578	37.697
16	3.942	5.812	7.962	9.312	23.542	26.296	32.000	39.252
17	4.416	6.408	8.672	10.085	24.769	27.587	33.409	40.790
18	4.905	7.015	9.390	10.865	25.989	28.869	34.805	42.312
19	5.407	7.633	10.117	11.651	27.204	30.144	36.191	43.820
20	5.921	8.260	10.851	12.443	28.412	31.410	37.566	45.315
21	6.447	8.897	11.591	13.240	29.615	32.671	38.932	46.797
22	6.983	9.542	12.338	14.041	30.813	33.924	40.289	48.268
23	7.529	10.196	13.091	14.848	32.007	35.172	41.638	49.728
24	8.085	10.856	13.848	15.659	33.196	36.415	42.980	51.179
25	8.649	11.524	14.611	16.473	34.382	37.652	44.314	52.620
26	9.222	12.198	15.379	17.292	35.563	38.885	45.642	54.052
27	9.803	12.879	16.151	18.114	36.741	40.113	46.963	55.476
28	10.391	13.565	16.928	18.939	37.916	41.337	48.278	56.892
29	10.986	14.256	17.708	19.768	39.087	42.557	49.588	58.301
30	11.588	14.953	18.493	20.599	40.256	43.773	50.892	59.703
35	14.668	18.509	22.465	24.797	46.059	49.802	57.342	66.619
40	17.916	22.164	26.509	29.051	51.805	55.758	63.691	73.402
45	21.251	25.901	30.612	33.350	57.505	61.656	69.957	80.077
50	24.674	29.707	34.764	37.689	63.167	67.505	76.154	86.661
55	28.173	33.570	38.958	42.060	68.795	73.311	82.292	93.168
60	31.738	37.485	43.188	46.459	74.397	79.082	88.379	99.607
70	39.036	45.442	51.739	55.329	85.527	90.531	100.425	112.317
80	46.520	53.540	60.391	64.278	96.578	101.879	112.329	124.839
90	54.155	61.754	69.126	73.291	107.565	113.145	124.116	137.208
100	61.918	70.065	77.929	82.358	118.498	124.342	135.807	149.449
200	143.843	156.432	168.279	174.835	226.021	233.994	249.445	267.541
500	407.947	429.388	449.147	459.926	540.930	553.127	576.493	603.446

Esimerkki / Example:

Jos $\alpha = 0.01$ ja $df = 11$, niin $\Pr(c^2 > 24.725) = 0.01$
 If $\alpha = 0.01$ and $df = 11$, then $\Pr(c^2 > 24.725) = 0.01$