Institutionen för matematik och systemanalys
Aalto-universitetet, högskolan för teknikvetenskaper

Till TF:s tentamensarkiv. Hälsn. Georg

MS-A0509 Grundkurs i sannolikhetskalkyl och statistik

Kurstentamen, 20.2.2019

Fyll i tydligt *på varje svarpapper* samtliga uppgifter. På *förhörskod och -namn* skriv kursens kod, namn samt *slutförhör* eller *mellanförhör* med ordningsnummer. Examenprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KTA, KON, MAR, MTE, PUU, RRT, TFM, TIK, TLT, TUO, YYT.

Till denna tentamen får medtagas en **minneslapp** (handskriven på bara ena sidan av ett A4 papper, försedd med studienummer, namn och namnteckning), en av Studentexamensnämnden godkänd **räknare** samt skrivdon. Observera, att olika deluppgifter kan ge olika poäng. Fråga om ni misstänker att det förekommer något tryckfel! Tentamenstiden är 3 timmar.

1. Vi kastar en röd, en vit och en blå tärning (vanliga, rättvisa 6-sidiga tärningar). Låt A vara ögonantalet, som den röda tärningen visar, B ögonantalet den vita tärningen visar och C ögonantalet den blå tärningen visar.
a) Beräkna den betingade sannolikheten $\mathbb{P}(A < C|A = i)$, $i = 1, \ldots, 6$. (1p.)
b) Beräkna sannolikheten $\mathbb{P}(A < C)$. (1p.)
c) Beräkna den betingade sannolikheten $\mathbb{P}((A < B) \cap (A < C)|A = i)$, $i = 1, \ldots, 6$. (1p.)
d) Beräkna sannolikheten $\mathbb{P}((A < B) \cap (A < C))$. (1p.)
e) Beräkna den betingade sannolikheten $\mathbb{P}(A < B|A < C)$. (2p.)

2. 60% av finländarna är "unga", dvs. under 50 år och resten är "gamla". 35% av de unga och 85% av de gamla använder glasögon.
Ett oberoende stickprov bestående av 100 finländare valdes slumpmässigt (med återläggning). Låt X vara antalet unga och Y antalet personer, som använder glasögon i stickprovet.
a) Beräkna $\mathbb{E}[X]$. (1p.)
b) Beräkna $\mathbb{E}[Y]$. (2p.)
c) Beräkna kovariansen $Cov(X, Y)$. (3p.)
(Gott råd: Skriv X och Y som summor av indikatorslumpvariabler.)

3. Vi tar ett stickprov bestående av 100 slumptal från en kontinuerlig likformig fördelning i intervallet $[-1, 2]$. Låt X vara antalet positiva tal i vårt stickprov. Approximera sannolikheten $\mathbb{P}(X < 60)$ mha. normalapproximationen. (6p.)

4. Låt X vara tiden (i sekunder) det tar från det att föreläsaren lämnar sitt kontor till det han stiger ombord på tunnelbanan. Denna tid kan modelleras som summan av en fix tid c (tiden att gå från kontoret till tunnelbaneperrongen) och en exponential-fördelad tid med parametern λ (väntetiden på perrongen). I så fall har slumpvariabeln X täthetsfunktionen
$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(t-c)}, & t \geq c \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$
Vi kan anta, att olika dagars väntetider är oberoende. Under fem dagar fick X värdena 185, 400, 250, 500, 375.
a) Bilda likelihood-funktionen för parametrarna c och λ. (2p.)
b) Bestäm maximum likelihood-skattningen av parametern c. (2p.)
c) Bestäm maximum likelihood-skattningen av parametern λ. (2p.)

1. Taulukko

Kertymäfunktion Φ(z) arvoja / Values of the cumulative distribution function Φ(z)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998