MS-C1080 – Algebran perusrakenteet, 25.4.2017

Camilla Hollanti, Ferdinand Blomqvist

Kaikissa tehtävissä renkaalla oletetaan olevan multiplikatiivinen identiteetti: $1_R \in R$.
Voit vastata suomeksi tai englanniksi.
Laskimia tai taulukoita ei sallita.

1. Selitä/määrittele seuraavat käsitteet:

   a) (2p) Ryhmä ja tekijäryhmä.

   b) (2p) Rengas ja ideaali (ihanne).

   c) (3p) Rengashomomorfismi. (Rengashomomorfismin) ydin ja kuvajoukko.

2. (6p) Olkoon $C_\infty = \langle c \rangle$ ääretön syklinen ryhmä. Osoita, että jos $n > 0$ niin

$$C_\infty / \langle c^n \rangle \simeq C_n,$$

   missä C_n on n-alkioinen äärellinen syklinen ryhmä.

3. a) (3p) Määrittele $[G : H]$ eli ryhmän G aliryhmän H indeksi G:ssä.

   b) (3p) Esitä ja todista Lagrangen indeksilause.

4. (6p) Osoita, että ryhmän aliryhmä voi olla ryhmähomomorfismin ydin jos ja vain jos kyseinen aliryhmä on normaali.

5. Olkoon $\mathbb{Z}[i] = \{n + im \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$ Gaussin kokonaislukujen rengas ($i = \sqrt{-1}$) ja $a - ib \in \mathbb{Z}[i]$, $\gcd(a, b) = 1$.

   a) (5p) Näytä, että

$$\mathbb{Z}[i]/\langle a - ib \rangle \simeq \mathbb{Z}/(a^2 + b^2)\mathbb{Z}.$$

   (Vinkki: Kanoninen projektio $\pi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[i]/\langle a - ib \rangle$, $\pi(n) = n + \langle a - ib \rangle$. Voit olettaa tämän kuvauksen olevan surjektiivinen).

   b) (2p) Milloin tekijärengas $\mathbb{Z}[i]/\langle a - ib \rangle$ on kunta?

[Extra] Saat +2p jos todistat a)-kohdassa olevan kanonisen projektion surjektiiviseksi.

Turn around for English!