

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin kysytyt tiedot!

1. Mitkä seuraavista väitteistä ovat tosia/epätosia? Jos väite on tosi, pelkkä toteaminen todeksi riittää. Jos väite on epätosi, anna lisäksi lyhyt perustelu.

- (a) Kaikilla kompleksiluvuilla  $z \in \mathbb{C}$  pätee  $|z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$ .
- (b) Kaikilla kompleksiluvuilla  $z \in \mathbb{C}$  tulo  $z\bar{z}$  on reaaliluku.
- (c) Kaikilla kompleksiluvuilla  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  pätee  $\arg \frac{z}{\bar{z}} = 0$ .

2. Tutkitaan ehdon

$$z = x + iy \mapsto x^2 - x + y + i(y^2 - 5y - x)$$

määräämää kompleksimuuttujan funktiota  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . Määrää ne kompleksitason pisteet, joissa

- (a) Cauchy-Riemann-yhtälöt ovat voimassa,
- (b)  $f$  on derivoituva ja määrää derivaatta  $f'(z)$ ,
- (c)  $f$  on analyyttinen.

3. Tutkitaan ehdon

$$z = x + iy \mapsto x^2 - y^2$$

määräämää kompleksimuuttujan funktiota  $u : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ . Määrää ne kompleksitason pisteet, joissa

- (a)  $u$  on harmoninen funktio,
- (b) löytyy analyyttinen funktio  $f$  siten, että pätee  $\operatorname{Re} f = u$ ,
- (c) löytyy analyyttinen funktio  $g$  siten, että pätee  $\operatorname{Im} g = u$ .

Esitä b) ja c) kohdissa löytämäsi funktiot muuttujan  $z$  avulla.