A! Aalto-yliopisto

MS-C1340 / Kevät 2016

Loppukoe / Välikoe to 7.4.16 klo 9:00 – 12:00

Ei laskimia, ei taulukoita, ei materiaalia. Tehtävien alakohdat tasa-arvoisia, ellei toisin mainita.

Tehtävä 1:

a) Näytä, että $Q = \{1,\ 2x,\ 4x^2 - 2\}$ on polynomiavaruuden $\mathbb{P}_2$ (= korkeintaan toisen asteen reaalikertoimiset polynomit) kanta.

b) Määritä kannanvaihtomatriisi kannasta $\{1,\ x,\ x^2\}$ kantaan Q ja esitä polynomi $x^2 + 3x + 5$ kannassa Q.

Tehtävä 2: Näytä, että matriisin $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ ydin ja riviavaruus ovat ortogonaaliset.

Tehtävä 3: Kirjoita systeemi

$$y_1' = 3y_1 - 2y_2, \quad y_2' = 2y_1 - 2y_2$$

muodossa $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ (1p), määritä A:n ominaisarvot ja -vektorit (3p), ja määritä systeemin ratkaisu $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t) = \big(y_1(t), y_2(t)\big)$ alkuarvolla $\mathbf{y}(0) = (c_1, c_2)$ (2p).

Käännä!

Tehtävä 4: Määritä e^A, kun

$$\text{a)} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{b)} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Tehtävä 5: Tarkastellaan epälineaarista systeemiä

$$\begin{aligned} x' &= 2y(z-1) \\ y' &= -x(z-1) \\ z' &= -z^3, \end{aligned}$$

missä $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Tutki origon stabiilisuutta:

a) Linearisoi systeemi origon ympärillä. Mitä voit päätellä origon stabiiliudesta pelkän linearisoinnin perusteella?

b) Etsi Lyuapunov-funktio muotoa $ax^2 + by^2 + cz^2$ ja päättele, että origo on stabiili.

Vihjeitä: Jos linearisoidun systeemin matriisin ominaisarvoille pätee $Re(\lambda) \leq 0$ kaikille λ ja $Re(\lambda) = 0$ jollekin λ, niin linearisoinnin perusteella ei voida sanoa tasapainopisteestä mitään. Funktio V on systeemin $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y})$ Lyuapunov-funktio tasapainopisteessä $\mathbf{p}$, jos $\mathbf{p}$ on V:n lokaali minimi ja $\dot{V} = \nabla V \cdot \mathbf{f} \leq 0$ pisteen $\mathbf{p}$ ympäristössä. Jos Lyuapunov-funktio löytyy, niin tasapainopiste on stabiili.