Matematiikka
Aalto-yliopisto

Hannukainen

MS-C1342 Lineaarialgebra

Tentti 13.12.2018

Ei Laskimia. Koeaika on 3 tuntia.

Harjoituspisteet kevään 2018 kurssilta vaikuttavat arvosanaa. Arvosana on parempi laskuharjoituspisteiden kanssa / ilman laskuharjoituspistä lasketuista arvosanoista.

1. Olkoot $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \alpha & 1-\alpha \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   (a) Määritä $N(A_1), N(A_2), N(A_3)$ (vihje : etsi α:n arvot, joille pätee $\det A_1 = 0$).

   (b) Mitkä matriiseista A_1, A_2, A_3 ovat diagonalisoituvia ?

   (c) Olkoot $n \in \mathbb{N}$ ja $N = A_2 - I$. Näytä, että

$$A_2^n = I + nN.$$

   ja laske A_2^{2019}. Vihje : $N^2 = 0$.

2. Olkoon $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $N(M) = \{0\}$ ja $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ siten, että $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (M\boldsymbol{y})^T(M\boldsymbol{x})$.

   (a) Näytä, että f on sisätulo.

   (b) Kiinnitä $M = I$ ja etsi $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ - ortonormaali kanta vektorijoukolle

$$\{\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1, \}$$

   käyttämällä Gram-Schmidt prosessia.

3. Olkoot $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}, M = M^T$ kääntyvä matriisi

   (a) Näytä, että $\|\boldsymbol{x}\|_M := \|M\boldsymbol{x}\|_2$ on normi.

   (b) Näytä, että normin $\|\cdot\|_M$ indusoimalle operaattorinormille $|||\cdot|||$ pätee

$$|||A||| := \|MAM^{-1}\|_2.$$

   (c) Olkoot

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

   Laske $|||A|||$ ja $\|A\|_2$.

4. Tarkastellaan matriisia $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ jonka singulaariarvohajotelma on

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

(a) Määritä $R(A)$ sekä ortogonaaliprojektio (Euklidisen sisätulon mielessä) $R(A)$:lle.

(b) Olkoot $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$. Tarkastellaan pienimmän neliösumman tehtävää: Etsi $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ joka minimoi funktion

$$\|A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|_2^2.$$

Näytä, että ratkaisulle $\boldsymbol{x}$ pätee $A\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{b}$, jossa P on ortogonaaliprojektio $R(A)$:lle.