

Välikoe 1 (30.9.2013)

Täytä huolellisesti kaikki vaaditut tiedot jokaiseen vastauspaperiin.

Laskimet ja taulukot eivät ole sallittuja.

Tällä kertaa saat olettaa tunnetuksi Fourier-käänteismuunnoksen kaavan.

Arvostelusta: Tarkastaja pisteyttää jokaisen tehtävän asteikolla 0...6. Täydet pisteet voi saada vastauksesta, jossa on harmiton pikkuvirhe. Tehtävästä on mahdollista saada pisteitä, jos vastauksessa on vähänkin asiaa (oikeanlaisia määritelmiä, aiheeseen liittyviä kuvia, laskelmia jne.) — tyhjä vastaus on varmasti nollan pisteen arvoinen.

1. Laske signaalin $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ Fourier-muunnos $\hat{s} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, kun

$$s(t) = \begin{cases} 2, & \text{jos } |t| < 3, \\ 0 & \text{muutoin.} \end{cases}$$

Aikasymmetrian nojalla \hat{s} on tässä tehtävässä reaaliarvoinen, joten sievennä vastauksesi selkeästi reaaliseksi!

2. Todista, että Fourier-muunnos säilyttää energian eli että

$$\|\hat{s}\|^2 = \|s\|^2$$

signaaleille $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$.

3. Näytä laskemalla, että signaalien $r, s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ konvoluutiolle $r * s$ pätee

$$\begin{aligned} (r * s)'(t) &= r' * s(t) \quad \text{ja} \\ \widehat{r * s}(\nu) &= \hat{r}(\nu) \hat{s}(\nu). \end{aligned}$$

4. Tarkastellaan signaaleja $s_0, s_1, s_2, s_3, s_4 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, missä

$$\hat{s}_0 = s_1, \hat{s}_1 = s_2, \hat{s}_2 = s_3 \text{ ja } \hat{s}_3 = s_4.$$

Miten s_0 ja s_4 liittyvät toisiinsa ja miksi näin on?