ELEC-A7200 Signals and Systems
Exam 29.1.2024

- Retake midterm exam 1: Solve problems 1 – 3 / Välikoe 1 uusinta: tee tehtävät 1 – 3
- Retake midterm exam 2: Solve problems 4 – 6 / Välikoe 2 uusinta: tee tehtävät 4 – 6
- Exam: Solve 5 problems / Tentti: ratkaise 5 tehtävää

1.

[ENG] Assume that $T_0 = 20$ and $T_1 = 10$ and consider the signal
[FI] Olkoon $T_0 = 20$ ja $T_1 = 10$ ja tarkastellaan signaalia
[SVE] Antag att $T_0 = 20$ och $T_1 = 10$ och betrakta signalen

$$s(t) = 2\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t - \frac{2\pi}{T_0}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{T_1}t\right).$$

Hint/Vihje/Tips: $\cos(\phi) = (e^{j\phi} + e^{-j\phi})/2$.

a) [ENG] Determine the mean power of the signal (1 p)
[FI] Laske signaalin keskiteho
[SVE] Beräkna signalens medeleffekt

b) [ENG] Determine the period of the signal (1 p)
[FI] Määrittele signaalin jakson pituus
[SVE] Bestäm perioden för signalen

c) [ENG] Sketch the two-sided amplitude spectrum of the signal (1 p)
[FI] Hahmottele signaalin kaksipuoleinen amplitudispektri
[SVE] Rita den dubbelriktade amplitudspektrumet av signalen

d) [ENG] Sketch the two-sided phase spectrum of the signal (1 p)
[FI] Hahmottele signaalin kaksipuoleinen vaihespektri
[SVE] Rita det dubbelriktade faspektrumet av signalen

e) [ENG] Sketch the two-sided power spectrum of the signal (1 p)
[FI] Hahmottele signaalin kaksipuoleinen tehospektri
[SVE] Rita det dubbelriktade effektspektrumet av signalen

f) [ENG] Sketch the one-sided power spectrum of the signal (1 p)
[FI] Hahmottele signaalin yksipuoleinen tehospektri
[SVE] Rita det ensidiga effektspektrumet av signalen

2.

[ENG] Consider a periodic signal:
[FI] Tarkastellaan seuraavaa periodista signaalia:
[SVE] Betrakta en periodisk signal:

$$s(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right), -\frac{1}{2}T_0 \leq t \leq \frac{1}{2}T_0$$
$$s(t + T_0) = s(t)$$
$$\tau < T_0$$

a) [ENG] Determine the mean power of the signal (1 p)
[FI] Laske signaalin keskiteho
[SVE] Beräkna signalens medeleffekt

b) [ENG] Determine the exponential Fourier-series coefficients of the signal (2 p)
[FI] Määrittele signaalin Fourierin sarjan kertoimet
[SVE] Bestäm de exponentiella Fourier-seriekoefficienterna för signalen

c) [ENG] Provide Fourier-cosine series representation of the signal (1 p)
[FI] Esitä signaali Fourierin kosinisarjana
[SVE] Ge den Fourier-cosinusserierepresentationen av signalen

d) [ENG] Determine the Fourier-transform of the signal (2 p)
[FI] Määrittele signaalin Fourierin muunnos
[SVE] Bestäm Fourier-transformen av signalen

3.

[ENG] Consider the two pulses:
[FI] Tarkastellaan kahta pulssia:
[SVE] Betrakta två pulser:

$$p_1(t) = -\frac{1}{\sqrt{T}}\mathrm{rect}\left(\frac{t+\frac{T}{4}}{\frac{T}{2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{T}}\mathrm{rect}\left(\frac{t-\frac{T}{4}}{\frac{T}{2}}\right) ,$$

$$p_2(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right).$$

a) [ENG] Sketch them in time domain (1 p)
[FI] Hahmottele ne aikatasossa
[SVE] Rita dem i tidsdomänen

b) [ENG] Determine their power (1 p)
[FI] Laske niiden teho
[SVE] Beräknä deras effekt

c) [ENG] Determine the inner product of the two signals.
Are the signals orthogonal? (1 p)
[FI] Määrittele näiden kahden signaalin sisätulo.
Ovatko signaalit ortonormaalit?
[SVE] Bestäm det inre produkten av de två signalerna.
Är signalerna ortonormala?

d) [ENG] Determine the convolution integral: (3 p)
[FI] Laske konvoluutiointegraali:
[SVE] Bestäm konvolutionsintegralen:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} p_2(\tau)p_2(t-\tau)d\tau$$

4.

[ENG] N=16 samples are obtained from a continuous time signal with sampling interval 1.25 ms as shown in Figure 4.1 (a). Figure 4.1 (b) illustrates the power spectral density obtained from the samples using FFT and Figure 4.2 (c) illustrates the power spectral density obtained from the samples using FFT after padding N=16 zeros to the end of the measured samples.

[FI] Otetaan N=16 näytettä jatkuva-aikaisesta signaalista näytevälillä 1.25 ms, kuten on kuvattu kuvassa 4.1 (a). Kuvassa 4.1 (b) on näytteiden pohjalta lasketun FFT:n tehotiheysspektri ja kuvassa 4.2 (c) on tehotiheysspektri, joka on saatu näytteiden FFT:stä, kun mitattujen näytteiden loppuun on lisätty N=16 nollaa.

[SVE] N=16 provtagningar erhålls från en kontinuerlig tidsignal med ett provtagnings-intervall på 1.25 ms, som visas i Figur 4.1 (a). Figur 4.1 (b) illustrerar effektspektraltätheten som erhållits från provtagningarna med hjälp av FFT, och Figur 4.2 (c) illustrerar effekt-spektraltätheten som erhållits från provtagningarna med hjälp av FFT efter att N=16 nollor har lagts till i slutet av de uppmätta provtagningarna.

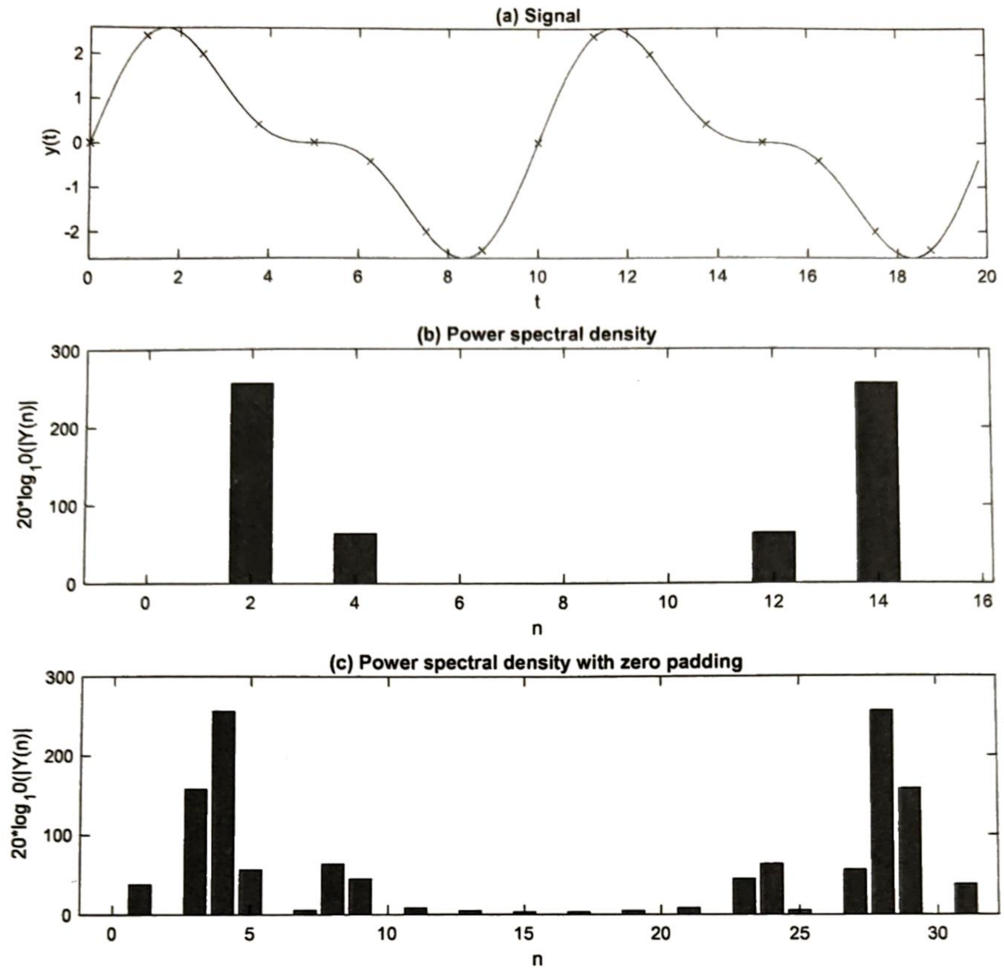

Figure 4.1 / Kuva 4.1 / Figur 4.1

a) [ENG] Determine Nyquist frequency (1 p)
[FI] Määrittele Nyquistin taajuus
[SVE] Bestäm Nyquist-frekvensen

b) [ENG] Define the frequencies corresponding to the indices $n = 1,\ldots, 15$ in Figure 4.1 (b) (1 p)
[FI] Määrittele taajuudet, joita indeksit $n = 1,\ldots, 15$ vastaavat kuvassa 4.1 (b)
[SVE] Bestäm frekvenserna som motsvarar indexen $n = 1,\ldots, 15$ i Figur 4.1 (b)

c) [ENG] What frequencies did the signal contain? (1 p)
[FI] Mitä taajuuksia signaali sisälsi?
[SVE] Vilka frekvenser innehöll signalen?

d) [ENG] Define the frequencies corresponding to the indices n in Figure 4.1 (c) (1 p)
[FI] Määrittele taajuudet, joita indeksit n vastaavat kuvassa 4.1 (c)
[SVE] Bestäm frekvenserna som motsvarar indexen n i Figur 4.1 (c)

e) [ENG] Explain the difference between Figures 4.1 (b) and (c) (1 p)
[FI] Selitä erot kuvien 4.1 (b) ja (c) välillä
[SVE] Förklara skillnaden mellan Figur 4.1 (b) och (c).

f) [ENG] How would the power spectrum in Figure 4.1 (b) change if the sampling frequency would be 300 Hz? (1 p)

[FI] Miten tehospektri muuttuisi kuvassa 4.1 (b), jos näytteiden otantataajuus olisi 300 Hz?
[SVE] Hur skulle effektspektrumet i Figur 4.1 (b) förändras om samplingsfrekvensen vore 300 Hz?

5.
[ENG] An audio amplifier is tested with a pure sinusoidal input signal. The output, however, contains not only the fundamental frequency but also higher-order harmonics due to non-linear behavior of the amplifier. The fundamental frequency of the input signal is 1 kHz. The output signal is analyzed and the following components are measured:

- Fundamental frequency (1 kHz) with an amplitude of 10 V
- Second harmonic (2 kHz) with an amplitude of 0.5 V
- Third harmonic (3 kHz) with an amplitude of 0.3 V
- Fourth harmonic (4 kHz) with an amplitude of 0.1 V
- Other harmonics are negligible.

a) Calculate the Total Harmonic Distortion (THD) of the amplifier's output signal. Express your answer as a percentage. (2 p)
b) Design Butterworth lowpass filter to reduce the THD assuming that the cutoff frequency $f_0 = 1$ kHz and the order of the filter should be chosen to reduce the amplitudes of the 2 kHz and 3 kHz harmonics at least by the factor 1/10. (3 p)
c) Determine THD for the filtered signal. (1 p)

The amplitude function of nth order Butterworth filter is given by $A(f) = 1/\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_0}\right)^{2n}}$.

[FI] Audiovahvistinta testataan syöttämällä siihen puhdasta sinisignaalia. Ulostulossa havaitaan perustaajuuden lisäksi korkeamman asteen harmonisia monikertoja vahvistimen epälineaarisuudesta johtuen. Sisäänmenosignaalin perustaajuus on 1 kHz. Ulostulevan signaalin mittauksessa on havaittu seuraavaa:

- Perustaajuuden (1 kHz) amplitudi on 10 V
- Toisen harmonisen komponentin (2 kHz) amplitudi on 0.5 V
- Kolmannen harmonisen komponentin (3 kHz) amplitudi on 0.3 V
- Neljännen harmonisen komponentin (4 kHz) amplitudi on 0.1 V
- Muiden korkeamman asteen harmonisten amplitudit ovat olemattoman pieniä.

a) Laske vahvistimen ulostulosignaalin THD (Total Harmonic Distortion). Anna vastaus prosentteina. (2 p)
b) Suunnittele Butterworth alipäästösuodatin vähentämään THD:tä olettaen, että suodattimen cutoff-taajuus $f_0 = 1$ kHz ja suodattimen asteluku tulee valita niin että 2 kHz ja 3 kHz harmonisten amplitudit pienenevät vähintään tekijällä 1/10. (3 p)
c) Laske suodatetun signaalin THD. (1 p)

Butterworth suodattimen, jonka asteluku on *n*, amplitude funktio on $A(f) = 1/\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_0}\right)^{2n}}$.

[SVE] En ljudförstärkare testas med en ren sinusformad ingångssignal. Utgången innehåller dock inte bara den grundläggande frekvensen utan även högre ordningens harmoniska på grund av förstärkarens icke-linjära beteende. Den grundläggande frekvensen för ingångssignalen är 1 kHz. Utgångssignalen analyseras och följande komponenter mäts:

- Grundfrekvensen (1 kHz) med en amplitud på 10 V
- Andra harmoniska (2 kHz) med en amplitud på 0,5 V
- Tredje harmoniska (3 kHz) med en amplitud på 0,3 V
- Fjärde harmoniska (4 kHz) med en amplitud på 0,1 V
- Andra harmoniska är försumbara.

a) Beräkna den totala harmoniska distorsionen (THD) för förstärkarens utgångssignal. Uttryck ditt svar som en procentandel. (2 p)

b) Designa en Butterworth-lågpassfilter för att minska THD och antag att cutoff-frekvensen $f_0 = 1$ kHz. Ordern på filtret bör väljas för att minska amplituderna av 2 kHz- och 3 kHz-harmonikerna med åtminstone en faktor av 1/10. (3 p)

c) Bestäm THD för den filtrerade signalen. (1 p)

Amplitudsfunktionen för Butterworth-filtret av ordning n ges av $A(f) = 1/\sqrt{1+\left(\frac{f}{f_0}\right)^{2n}}$.

6.

[ENG] Power spectral density of bandwidth limited white noise $n(t)$ is given by
[FI] Kaistarajoitetun valkoisen kohinan $n(t)$ tehotiheysspektri on
[SVE] Effektspektraltätheten för bandbredds begränsat vitt brus $n(t)$ ges av

$$S_{nn}(f) = \frac{1}{2}N_0 \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$$

a) [ENG] Determine the autocorrelation function of the noise (2 p)
[FI] Määrittele kohinan autokorrelaatiofunktio
[SVE] Bestäm brusets autokorrelationsfunktion.

b) [ENG] Determine the mean power of the noise (1 p)
[ENG] Laske kohinan keskiteho
[SVE] Bestäm medelvärdet av brusets effekt.

c) [ENG] The noise passes through a linear time invariant system $\frac{dy(t)}{dt} - y(t) = n(t)$. Determine the spectral density of the filtered noise $y(t)$. (3 p)
[FI] Kohina menee läpi lineaarisesta ja aikainvariantista systeemistä (LTI) $\frac{dy(t)}{dt} - y(t) = n(t)$. Määrittele suodatetun kohinan $y(t)$ tehotiheysspektri.
[SVE] Bruset passerar genom ett linjärt tidsinvariant system $\frac{dy(t)}{dt} - y(t) = n(t)$. Bestäm spektraltätheten för det filtrerade bruset $y(t)$.

Theorems of the fourier transform	Function	Transform
Linearity	$ax(t) + by(t)$	$aX(f) + bY(f)$
Time delay or time shift	$x(t-a)$	$X(f)e^{-j2\pi fa}$
Scale change	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X(\frac{f}{a})$
Conjugation	$x^*(t)$	$X^*(-f)$
Duality	$X(t)$	$x(-f)$
Frequency shift	$x(t)e^{j2\pi at}$	$X(f-a)$
Linear modulation	$x(t)\cos(2\pi at + b)$	$\frac{e^{jb}X(f-a)+e^{-jb}X(f+a)}{2}$
Differentiation	$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$(j2\pi f)^n X(f)$
Integration	$\int_{-\infty}^{t} x(u)du$	$\frac{X(f)}{j2\pi f}$
Convolution	$x(t) \otimes y(t)$	$X(f)Y(f)$
Multiplication	$x(t)y(t)$	$X(f) \otimes Y(f)$
Multiplication by t^n	$t^n x(t)$	$-\frac{1}{j2\pi}\frac{d^n X(f)}{df^n}$

Fourier transforms	Function	Transform
Rectangular pulse	$\mathrm{rect}(t/a)$	$a \cdot \mathrm{sinc}(af)$
Triangular pulse	$\mathrm{tria}(t/a)$	$a \cdot \mathrm{sinc}^2(af)$
Gaussian pulse	$e^{-\pi(\frac{t}{a})^2}$	$a \cdot e^{-\pi(af)^2}$
One sided exponential pulse	$e^{-t/a}u(t)$	$\frac{a}{1+j2\pi fa}$
Two sided exponential pulse	$e^{-\lvert t\rvert/a}$	$\frac{2a}{1+(2\pi fa)^2}$
Sinc pulse	$\mathrm{sinc}(at)$	$\frac{1}{a}\mathrm{rect}(f/a)$
Constant	a	$a \cdot \delta(f)$
Phasor	$e^{j(2\pi at+b)}$	$e^{jb}\delta(f-a)$
Cosine wave	$\cos(2\pi at + b)$	$\frac{e^{jb}\delta(f-a)+e^{-jb}\delta(f+a)}{2}$
Delayed impulse	$\delta(t-a)$	$e^{-j2\pi fa}$
Step	$u(t)$	$\frac{\delta(f)}{2} + \frac{1}{j2\pi f}$

$$
\begin{aligned}
T_0 &= \frac{1}{f_0} = \frac{2\pi}{\omega_0} \\
e^{j\phi} &= \cos(\phi) + j\sin(\phi) \\
\sin(\phi) &= \frac{1}{2j}(e^{j\phi} - e^{-j\phi}) \\
\cos(\phi) &= \frac{1}{2}(e^{j\phi} + e^{-j\phi}) \\
\sin^2\phi + \cos^2\phi &= 1 \\
\cos(\phi) &= \sin(\phi - \pi/2) \\
\sin(\phi) &= \cos(\phi + \pi/2) \\
\sin(\alpha)\cos(\beta) &= \frac{\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)}{2} \\
\sin(\alpha)\sin(\beta) &= \frac{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)}{2} \\
\cos(\alpha)\cos(\beta) &= \frac{\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)}{2} \\
x(t) \otimes y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)y(t-\lambda)\,d\lambda = y(t) \otimes x(t) \\
x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{j2\pi k f_0 t} = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\Big[\alpha_k \cos(2\pi k f_0 t) + \beta_k \sin(2\pi k f_0 t)\Big] \\
x_k &= \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \\
\alpha_k &= 2\cdot \mathrm{Re}\{x_k\}, \quad \text{when } x(t) \in \mathbb{R} \\
\beta_k &= -2\cdot \mathrm{Im}\{x_k\}, \quad \text{when } x(t) \in \mathbb{R} \\
X(f) &= \mathcal{F}\Big\{x(t)\Big\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \\
x(t) &= \mathcal{F}^{-1}\Big\{X(f)\Big\} = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df \\
X_k &= \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j2\pi kn/N} \\
x_k &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X_n e^{j2\pi kn/N} \\
f_0 &= \frac{1}{N\cdot T_s} = \frac{f_s}{N} \\
s &= \sigma + j\omega = \sigma + j2\pi f \\
X(s) &= \mathcal{L}\Big\{x(t)\Big\} = \int_0^{\infty} x(t)\cdot e^{-st} dt \\
d_n &= \frac{u_n}{u_1} \\
d_{\text{tot}} &= \sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} d_n^2}
\end{aligned}
$$