

[>

## MS-A0204, 19.2.2024, ratkaisut

### Tehtävä 1

>  $x := t^2; y := t - t^3$

$$\begin{aligned} x &:= t^2 \\ y &:= -t^3 + t \end{aligned} \tag{1.1}$$

>  $\text{diff}(y, t) = 0$

$$-3t^2 + 1 = 0 \tag{1.2}$$

>  $\text{solve}(\%)$

$$-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \tag{1.3}$$

Ilmeisesti positiivinen parametri arvo tuottaa korkeimman kohdan.

>  $\text{subs}\left(t = \frac{1}{\text{sqrt}(3)}, y\right)$

$$\frac{2\sqrt{3}}{9} \tag{1.4}$$

Vastauksen voi kirjoittaa myös muodossa  $\frac{2}{3\sqrt{3}}$ .

Tangenttivektori on yleisesti muotoa  $\mathbf{r}'(t) = 2t \mathbf{i} + (1 - 3t^2) \mathbf{j}$ , josta arvoilla  $t = \pm 1$  saadaan  $\mathbf{r}'(\pm 1) = \pm 2 \mathbf{i} - 2 \mathbf{j}$ . Näiden pistetulo on nolla, joten leikkaus on kohtisuora.

Kaarenpituus saadaan kaavasta

$$\int_{-1}^1 \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = \int_{-1}^1 \sqrt{4t^2 + (1 - 3t^2)^2} dt = \int_{-1}^1 \sqrt{1 - 2t^2 + 9t^4} dt,$$

jossa keskimmäinenkin muoto riittää.

Lisätietoja:

>  $\text{int}(\text{sqrt}(1 - 2 \cdot t^2 + 9 \cdot t^4), t = -1 .. 1)$

$$2\sqrt{2} + \frac{\sqrt{7} \operatorname{arcsinh}(\sqrt{7})}{7} \tag{1.5}$$

>  $\text{evalf}(\%)$

$$3.470982681 \tag{1.6}$$

### Tehtävä 2

>  $f := (x, y) \rightarrow \frac{x^2 + 2 \cdot y^2}{2 \cdot x^2 + y^2}$

$$f := (x, y) \mapsto \frac{x^2 + 2 \cdot y^2}{2 \cdot x^2 + y^2} \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} > f(x, 0) \\ & \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned} > f(0, y) \\ & 2 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Koska koordinaattiakseleilla saadaan eri vakioarvot, niin myös raja-arvot näitä suoria pitkin ovat erisuuret. Raja-arvoa origossa ei siis ole olemassa.

$$\begin{aligned} > g := x^3 + x^2 + 2 \cdot x \cdot y - 3 \cdot x + y^2 \\ & g := x^3 + x^2 + 2 y x + y^2 - 3 x \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned} > \text{diff}(g, x) = 0, \text{diff}(g, y) = 0 \\ & 3 x^2 + 2 x + 2 y - 3 = 0, 2 x + 2 y = 0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned} > \text{solve}(\{\%\}) \\ & \{x=1, y=-1\}, \{x=-1, y=1\} \end{aligned} \tag{2.6}$$

Kriittisiä pisteitä on siis kaksi:  $(1, -1)$  ja  $(-1, 1)$ .

### Tehtävä 3

Kokeillaan implisiittistä derivointia:

$$\begin{aligned} > y(x)^5 + x \cdot y(x) + x^2 = 13 \\ & y(x)^5 + x y(x) + x^2 = 13 \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} > \text{diff}(\%, x) \\ & 5 y(x)^4 \left( \frac{d}{dx} y(x) \right) + y(x) + x \left( \frac{d}{dx} y(x) \right) + 2 x = 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned} > \text{solve}\left(\%, \frac{d}{dx} y(x)\right) \\ & -\frac{y(x) + 2 x}{5 y(x)^4 + x} \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} > \text{subs}(\{x=3, y(x)=1\}, \%) \\ & -\frac{7}{8} \end{aligned} \tag{3.4}$$

Tangenttisuoran yhtälö on siis

$$\begin{aligned} > y - 1 = \% \cdot (x - 3) \\ & y - 1 = -\frac{7x}{8} + \frac{21}{8} \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned} > y = \text{solve}(\%, y) \\ & y = -\frac{7x}{8} + \frac{29}{8} \end{aligned} \tag{3.6}$$

## Tehtävä 4

```
> restart
> f := (x, y) -> y
f := (x, y) -> y (4.1)
```

```
> g := (x, y) -> x^2 + 3*y^2 - 2*x*y - 6
g := (x, y) -> x^2 + 3*y^2 - 2*y*x - 6 (4.2)
```

```
> diff(f(x, y), x) = lambda*diff(g(x, y), x), diff(f(x, y), y) = lambda*diff(g(x, y), x), g(x, y) = 0
0 = lambda(2*x - 2*y), 1 = lambda(2*x - 2*y), x^2 - 2*y*x + 3*y^2 - 6 = 0 (4.3)
```

Ensimmäisen yhtälön perusteella joko  $\lambda = 0$  tai  $x = y$ . Toisen yhtälön mukaan  $\lambda = 0$  ei ole mahdollinen, joten sijoitetaan  $x = y$  sidosehtoon:

```
> g(x, x) = 0
2*x^2 - 6 = 0 (4.4)
```

```
> solve(%)
sqrt(3), -sqrt(3) (4.5)
```

Korkein kohta on siis  $(\sqrt{3}, \sqrt{3})$  ja matalin kohta  $(-\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ .

## Tehtävä 5

Kolmion yläreunan yhtälö on  $y = 2x$ , joten integraaliksi saadaan vaiheittain

```
> restart
> int(6*x^2 - 3*y^2, y = 0..2*x)
4*x^3 (5.1)
```

```
> int(%, x = 0..2)
16 (5.2)
```

## Tehtävä 6

Tilavuus saadaan integroimalla yläreunan funktio  $\sqrt{\pi}$ -säteisessä kiekossa. Käytetään napakoordinaatistoa, jossa pinta-alan paikallinen suurennussuhde on  $r$ .

```
> int(r*sin(r^2), r = 0..sqrt(Pi))
1 (6.1)
```

```
> int(%, theta = 0..Pi)
pi (6.2)
```