ELEC-C1230 Säätötekniikka
Välikoe 1. 22.2.2024 Ratkaisut

1. Systeemin tilaesitys on

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

a. Määritä systeemin siirtofunktio. (1p)

b. Määritä systeemin tulo-lähtökäyttäytymistä kuvaava differentiaaliyhtälö. (2p)

c. Piirrä napa-nolla-kuvio. Mitä voit päätellä systeemin käyttäytymisestä kuvion perusteella? (3p)

Ratkaisut:

a. Siirtofunktion voidaan laskea suoraan kaavalla

$$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ 4 & s+3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} = \frac{2s+1}{s^2+6s+5}.$$

b. Tässä pääsee vähimmällä jatkamalla a-kohdasta. Käyttämällä siirtofunktion määritelmää saadaan

$$G(s) = \frac{2s+1}{s^2+6s+5} = \frac{Y(s)}{U(s)}.$$

Kertomalla molemmat puolet nimittäjillä saadaan

$$s^2Y(s) + 6sY(s) + 5Y(s) = 2sU(s) + U(s),$$

josta saadaan Laplace-käänteismuunnoksella kysytty differentiaaliyhtälö

$$\ddot{y}(t) + 6\dot{y}(t) + 5y(t) = 2\dot{u}(t) + u(t).$$

Vaihtoehtoinen tapa: Differentiaaliyhtälön voi määrittää tilaesityksestä. Matriisikertolaskujen jälkeen tilaesityksestä saadaan (jätetään t kirjoittamatta mukavuussyistä)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 + x_2 + 2u \\ \dot{x}_2 = 4x_1 - 3x_2 - 5u. \end{cases}$$

Sijoitetaan ensimmäiseen yhtälöön $x_1 = y$:

$$\dot{y} = -3y + x_2 + 2u$$

ja ratkaistaan x_2:

$$x_2 = \dot{y} + 3y - 2u.$$

Sijoitetaan tämä alempaan yhtälöön, mistä saadaan

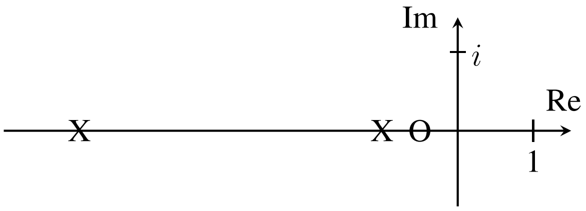
$$\ddot{y} + 3\dot{y} - 2\dot{u} = 4y - 3(\dot{y} + 3y - 2u) - 5u.$$

Siirretään vielä y:t vasemmalle ja u:t oikealle, ja kirjoitetaan t mukaan:

$$\ddot{y}(t) + 6\dot{y}(t) + 5y(t) = 2\dot{u}(t) + u(t),$$

joka on kysytty differentiaaliyhtälö. Tästä voitaisiin edelleen määrittää a-kohdan siirtofunktio Laplace-muunnoksen avulla, jos sitä ei laskettaisi suoraan kaavalla.

c. Siirtofunktion osoittaja on $2s + 1$, jonka nollakohta $s = -\frac{1}{2}$ on systeemin nolla. Siirtofunktion nimittäjä on $s^2 + 6s + 5 = (s + 1)(s + 5)$, jonka nollakohdat $s_1 = -1$ ja $s_2 = -5$ ovat systeemin navat. Jos tekijöihin jakoa ei keksi suoraan, niin navat voi laskea laskimella tai toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla. Napa-nolla-kuvio näyttää siis suunnilleen tältä:



Kuviosta selviää, että

- systeemi on stabiili, koska molemmat navat ovat vasemmassa puolitasossa,
- systeemi on ylivaimennettu, koska navat ovat reaaliset ja erisuuret, ja siksi systeemi ei värähtele,
- systeemi on minimivaiheinen, koska nolla on vasemmassa puolitasossa.

Lisäksi voi todeta, että siirtofunktiota muodostettaessa ei tapahdu nolla-napa-supistuksia, joten systeemin tilaesitys on saavutettava (ohjattava) ja tarkkailtava. Tämä ei tosin selviä pelkästään napa-nolla-kuviosta, vaan lisäksi pitää tietää myös tilaesityksen kertaluku.

2. Systeemin siirtofunktio on

$$G(s) = \frac{5}{s^2 + 4s + 5}.$$

a. Määritä systeemin painofunktio. (1p)

b. Määritä systeemin yksikköaskelvaste. (3p)

c. Määritä b-kohdan vasteen asymptoottinen käyttäytyminen

i. laskemalla suoraan $\lim_{t\to\infty} y(t)$,

ii. siirtofunktion avulla.

Päteekö loppuarvoteoreema tässä tapauksessa? Perustele vastauksesi. (2p)

Ratkaisut:

Huom. a- ja b-kohdan voi ratkaista myös käyttämällä toisen kertaluvun dynamiikan kaavoja, jos siirtofunktion kirjoittaa muotoon

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2},$$

jossa $K = 1, \omega_n = \sqrt{5}$, ja $\zeta = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$. Alla a- ja b-kohdan ratkaisut on esitetty Laplace muunnoksia käyttämällä.

a. Systeemin painofunktio on siirtofunktion Laplace-käänteismuunnos. Kirjoitetaan siirtofunktion nimittäjä muotoon $s^2 + 4s + 5 = (s + b)^2 + a^2$, jotta voidaan käyttää Laplace-muunoskaavoja. Saadaan $s^2 + 4s + 5 = (s + 2)^2 + 1^2$, ja siten

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s^2 + 4s + 5}\right\} = 5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s + 2)^2 + 1^2}\right\} = 5e^{-2t}\sin(t).$$

b. Askelvaste saadaan siirtofunktion avulla kaavasta $Y(s) = G(s)U(s)$, jossa yksikköaskelherätteellä $U(s) = \frac{1}{s}$. Saadaan siis

$$Y(s) = \frac{5}{s^2 + 4s + 5}\frac{1}{s} = \frac{As + B}{s^2 + 4s + 5} + \frac{C}{s},$$

jossa jälkimmäinen muoto tulee osamurtokehitelmästä. Laventamalla termit samannimisiksi, saadaan

$$\frac{As + B}{s^2 + 4s + 5} + \frac{C}{s} = \frac{As^2 + Bs + Cs^2 + 4Cs + 5C}{(s^2 + 4s + 5)s} = \frac{(A + C)s^2 + (B + 4C)s + 5C}{(s^2 + 4s + 5)s}.$$

Koska $5 = (A + C)s^2 + (B + 4C)s + 5C$, saadaan ratkaistua $C = 1, B = -4$ ja $A = -1$. Osamurtokehitelmä on siis

$$\frac{5}{s^2 + 4s + 5}\frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{s + 4}{s^2 + 4s + 5}.$$

Jaetaan jälkimmäinen termi vielä osiin siten, että voidaan käyttää Laplace-muunnostaulukoita:

$$-\frac{s + 4}{s^2 + 4s + 5} = -\frac{s + 2}{(s + 2)^2 + 1^2} - 2\frac{1}{(s + 2)^2 + 1^2}.$$

Lopulta käänteismuuntamalla saadaan kysytty vaste

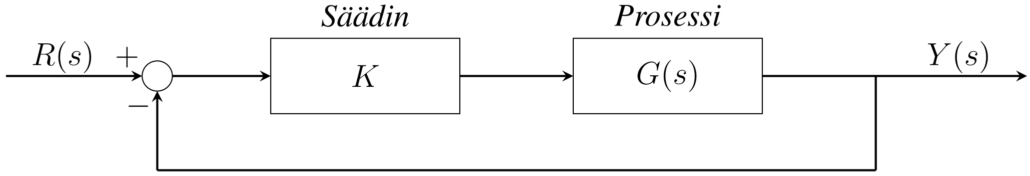
$$\begin{aligned} y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} - \frac{s + 2}{(s + 2)^2 + 1^2} - 2\frac{1}{(s + 2)^2 + 1^2}\right\} \\ &= 1 - e^{-2t}\cos(t) - 2e^{-2t}\sin(t) \\ &= 1 - e^{-2t}(\cos(t) + 2\sin(t)) \end{aligned}$$

c. Suoraan laskemalla saadaan $\lim_{t\to\infty} y(t) = 1$, koska $\lim_{t\to\infty} e^{-2t} = 0$ ja $-3 \le \cos(t) + 2\sin(t) \le 3$ kaikilla $t \ge 0$. Siirtofunktion avulla saadaan askelvasteelle

$$\lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} sG(s)\frac{1}{s} = \lim_{s\to 0} G(s) = \lim_{s\to 0} \frac{5}{s^2 + 4s + 5} = 1,$$

eli tuli sama tulos, ja siten loppuarvotoereema pätee. Niin pitääkin, koska systeemi on asymptoottisesti stabiili, sillä siirtofunktion navat ovat $-2 \pm i$.

3. Tarkastellaan säätöjärjestelmää, jota kuvaa oheinen lohkokaavio



jossa prosessia kuvaa siirtofunktio $G(s) = \dfrac{2}{s^3 + 2s^2 + 2s - 2}$.

a. Määritä järjestelmän siirtofunktio. (2p)

b. Selvitä Routhin kaavion avulla, millä parametrin K arvoilla järjestelmä on stabiili. Entä asymptoottisesti stabiili? (4p)

Ratkaisut:

a. Lohkokaavioalgebralla saadaan

$$Y(s) = G(s)U(s) = G(s)KE(s) = G(s)K(R(s) - Y(s)),$$

josta saadaan ratkaistua

$$Y(s) = \frac{G(s)K}{1 + G(s)K}R(s) = G_{tot}(s)R(s).$$

Sijoitamalla $G(s)$:n lauseke saadaan vielä

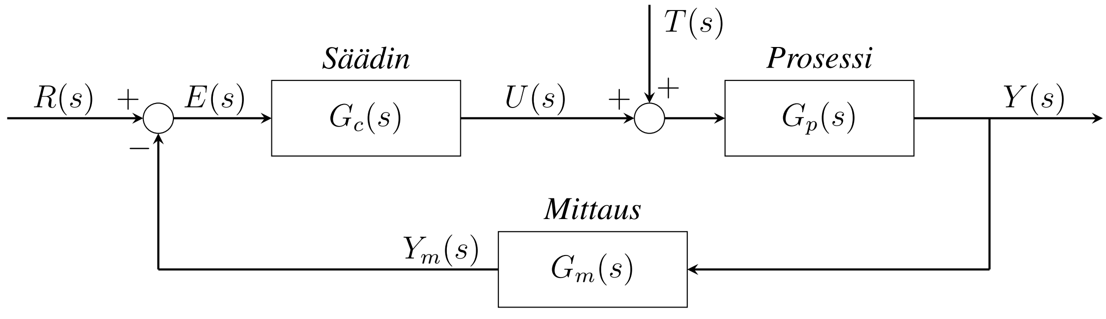
$$G_{tot}(s) = \frac{\frac{2}{s^3+2s^2+2s-2}K}{1 + \frac{2}{s^3+2s^2+2s-2}K} = \frac{2K}{s^3 + 2s^2 + 2s - 2 + 2K}.$$

b. Selvitetään Routhin kaavion avulla ne K:n arvot, joilla järjestelmän navat, eli nimittäjäpolynomin nollakohdat, ovat vasemmassa puolistasossa. Routhin kaavioksi saadaan

$$\begin{array}{c|cc}
s^3 & 1 & 2 \\
s^2 & 2 & 2K-2 \\
s^1 & -\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & 2 \\ 2 & 2K-2\end{vmatrix} = 3-K & 0 \\
s^0 & -\frac{1}{3-K}\begin{vmatrix}2 & 2K-2 \\ 3-K & 0\end{vmatrix} = 2K-2 & 0
\end{array}$$

Routhin kaavion perusteella järjestelmä on stabiili, kun ensimmäiseen sarakkeeseen ei tule merkinvaihtoja, eli kun $3 - K \geq 0$ ja $2K - 2 \geq 0$, ja siten $1 \leq K \leq 3$. Lisäksi, jos ensimmäiseen sarakkeeseen ei tule nollia, niin silloin järjestelmä on asymptoottisesti stabiili, eli kun $1 < K < 3$.

4. Tarkastellaan kuvassa esitettyä säätöjärjestelmää



jossa prosessia $G_p(s) = G(s) = \dfrac{2s+1}{s^2}$ säädetään PD-säätimellä $G_c(s) = 10(1 + s)$ ja mittauksen siirtofunktio on $G_m(s) = \dfrac{1}{s+1}$.

a. Määritä siirtofunktio häiriöstä $T(s)$ lähtösuureeseen $Y(s)$. (2p)

b. Määritä lähtösuureen $Y(s)$ asymptoottinen käyttäytyminen, kun $R(s) = 0$ ja häiriönä $T(s)$ on yksikköaskelfunktio. (2p)

c. Onnistuuko PD-säädin b-kohdan askelhäiriön kompensoinnissa? Onko saatu tulos tyypillinen PD-säätimelle? Perustele vastauksesi. (2p)

Ratkaisu:

a. Lohkokaavioalgebralla saadaan

$$\begin{cases} Y(s) & = G_p(s)(T(s) + U(s)) \\ U(s) & = G_c(s)E(s) \\ E(s) & = R(s) - Y_m(s) \\ Y_m(s) & = G_m(s)Y(s) \end{cases},$$

josta tulee sijoitusten jälkeen

$$Y(s) = G_p(s)T(s) + G_p(s)G_c(s)R(s) - G_p(s)G_c(s)G_m(s)Y(s).$$

Ratkaistaan $Y(s)$

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{G_p(s)}{1 + G_p(s)G_c(s)G_m(s)}T(s) + \frac{G_p(s)G_c(s)}{1 + G_p(s)G_c(s)G_m(s)}R(s) \\ &= G_T(s)T(s) + G_R(s)R(s) \end{aligned}$$

ja sijoitetaan vielä yksittäisten siirtofunktioiden arvot $G_T(s)$:n lausekeeseen

$$G_T(s) = \frac{\frac{2s+1}{s^2}}{1 + \frac{2s+1}{s^2}10(1+s)\frac{1}{s+1}} = \frac{2s+1}{s^2 + 20s + 10}.$$

Kun tässä kysyttiin vain siirtofunktiota häiriöstä lähtösuureeseen välittämättä referenssistä, niin heti olisi voitu asettaa $R(s) = 0$ ja jättää referenssi huomiotta.

b. Käytetään loppuarvoteoreemaa (tai staattista vahvistusta) lähtösuureen asymptoottisen arvon määrittämiseen, kun $R(s) = 0$ ja häiriönä $T(s)$ on yksikköaskel. Ennen loppuarvon laskemista, todetaan, että $G_T(s)$ on asymptoottisesti stabiilin järjestelmän siirtofunktio, koska sen navat ovat $-10 \pm 3\sqrt{10} < 0$. Asymptoottisen stabiilisuuden voi päätellä myös laskematta napoja, esimerkiksi siitä, että kyseessä on ylivaimennetun toisen kertaluvun järjestelmän siirtofunktio, tai sijoittamalla nimittäjäpolynomi Routhin kaavioon.

Staattiseksi vahvisukseksi saadaa

$$\lim_{s\to 0} G_T(s) = \lim_{s\to 0} \frac{2s+1}{s^2 + 20s + 10} = \frac{1}{10},$$

joten häiriön ollessa yksikköaskel lähtösuure asettuu asymptoottisesti arvoon $\frac{1}{10}$.

Huom. Toivottavasti kukaan ei lähde laskemaan tätä askelvasteen perusteella, mutta jos lähtee, niin askelvasteeksi tulee

$$y(t) = \frac{1}{10} + \frac{19\sqrt{10} - 60}{60}\frac{e^{-(10-3\sqrt{10})t}}{10 - 3\sqrt{10}} - \frac{19\sqrt{10} + 60}{60}\frac{e^{-(10+3\sqrt{10})t}}{10 + 3\sqrt{10}},$$

joka voidaan esittää myös muodossa

$$y(t) = \frac{1}{10} - \frac{e^{-10t}}{10}\left(\cosh(3\sqrt{10}t) - \frac{\sqrt{10}}{3}\sinh(3\sqrt{10}t)\right),$$

ja näistä saadaan kyllä sama raja-arvo $\lim_{t\to\infty} y(t) = \dfrac{1}{10}$ kuin siirtofunktionkin perusteella. Jälkimmäisen muodon kanssa pitää tosin olla tarkkana sen kanssa, että e^{-10t} vaimenee voimakkaammin kuin $\cosh(3\sqrt{10}t)$ ja $\sinh(3\sqrt{10}t)$ kasvavat.

c. PD-säädin ei onnistu häiriön kompnsoinnissa, koska lähtösuureen asymptoottinen arvo yksikköaskelhäiriöllä on $\frac{1}{10} \neq 0$. Näin voi hyvinkin käydä PD-säätimen kanssa, koska sekä suhdesäätötermi P että derivoiva termi D muuttuvat suhteessa erosuureen muutoksiin, mutta eivät reagoi siihen, onko erosuure nolla vai ei. Eli PD-säätimellä erosuure konvergoi kyllä johonkin vakioarvoon (olettaen, että suljettu järjestelmä on asymptoottisesti stabiili), mutta tämä vakioarvo ei yleisesti ottaen ole nolla. Tästä syystä säätimeen lisätään usein integroiva termi, joka poistaa pysyvän poikkeaman erosuureesta.

Lisäksi on hyvä huomata, että tässä tapauksessa erosuureena on $R(s) - Y_m(s)$ eikä suoraan $R(s) - Y(s)$, joten mahdolliset mittausvirheet voisivat myös selittää poikkeaman lähtösuureessa. Tämä ei kuitenkaan ole poikkeaman syy tässä tapauksessa, koska mittauksessa $G_m(s)$ ei ole systemaattista virhettä vaan ainoastaan stabiili ensimmäisen kertaluvun dynamiikka, jonka staattinen vahvistus on 1.