Aalto-universitetet
Björn Ivarsson, 050-4067 832

Kurstentamen, onsdag 17.04.2024, 09.00 - 12.00
Tentamen, onsdag 17.04.2024, 09.00 - 12.00
Differential- och integralkalkyl 3, MS-A0309

Motivera dina svar! Att endast lämna svar ger inga poäng. I **kurstentamen** (för er som läste kursen period 4, 2024) ingår fem uppgifter från uppgift 1, 2, 3, 4, 5 och 6. Om ni gör samtliga uppgifter så räknas de fem med bäst resultat. I **tentamen** ingår uppgift 1, 2, 3, 4, 5 och 6.

Hjälpmedel: Skrivdon. Inga räknare, inga böcker och inga formelsamlingar. Det finns en formelsamling på tentamenspappret.

(1) (a) Beräkna divergens och rotation för vektorfältet
$$\vec{F}(x,y,z) = (x, 3xy, z).$$
(3p)

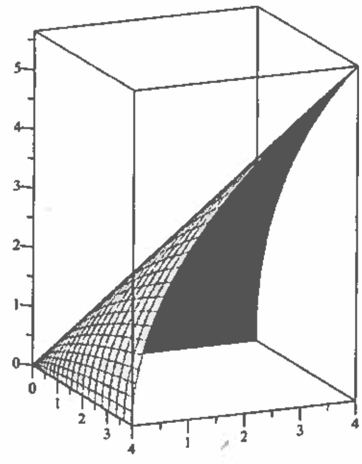
(b) Bestäm integralkurvorna till vektorfältet
$$\vec{F}(x,y) = (1, -2x).$$
(3p)

(2) Låt γ vara kurvan med parametrisering $\gamma(t) = (3t, 4t^2, 3t^2)$ då $-\pi \leq t \leq \pi$. Låt $\vec{F}$ vara vektorfältet
$$\vec{F}(x,y,z) = (2xyz + \sin x, x^2 z, x^2 y).$$
(a) Bestäm en potentialfunktion till $\vec{F}(x,y,z)$. (3p)

(b) Beräkna
$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$
(3p)

(3) Antag att K är en begränsad kropp i $\mathbb{R}^3$ som begränsas av en glatt randyta $\mathcal{S}$. Låt $\vec{F}(x,y,z) = (x,y,z)$, låt $\vec{N}$ vara enhetsnormalfältet till $\mathcal{S}$ som pekar utåt och låt V vara kroppens volym. Visa att
$$V = \frac{1}{3} \iint_{\mathcal{S}} \vec{F} \cdot \vec{N} dS.$$
(6p)

(4) Låt $\vec{F}(x,y,z) = (xz + yz^2 + x, xyz^3 + y, x^2 z^4)$ och
$$\mathcal{S} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ och } z \geq 0\right\}.$$
Antag att $\vec{N}$ är enhetsnormalfältet till $\mathcal{S}$ som pekar uppåt. Beräkna
$$\iint_{\mathcal{S}} (\mathrm{Curl}\, \vec{F}) \cdot \vec{N}\; dS.$$
(6p)



Figur 1. Taket som parametriseras av $\vec{r}$.

(5) Låt a, b, c vara strikt positiva tal och

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ och } z \geq 0 \right\}.$$

Antag att $\vec{N}$ är enhetsnormalfältet till S som pekar uppåt och låt $\vec{F}(x, y, z) = (x^3, 0, 0)$. Beräkna

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{N} \, dS.$$

(*Ledning:* I ett läge kan det vara bra att komma ihåg att $\cos^4 \theta = (\cos^2 \theta)^2$.) (6*p*)

(6) En arkitekt designade ett tak till en scen för utomhuskonserter, vars form (se figur 1) beskrivs av parametriseringen

$$\vec{r}(u, v) = (u^2, v^2, \sqrt{2}uv),$$

där parameterrummet ges av kvadraten

$$\Omega = \{(u, v) \mid 0 \leq u \leq 2,\ 0 \leq v \leq 2\}.$$

(a) Bilda ett uttryck för normalvektorfältet till ytan och visa att ytans lutningsvinkel är 45° längs kurvsegmentet som motsvarar parametervärdena $u = v \in [0, 2]$. (3p)

(b) Visa att den lokala areaskalan är av formen

$$dS = 2\sqrt{2}(u^2 + v^2) \, dudv,$$

och beräkna takets ytarea. (3p)

Lycka till!

En formelsamling:

- **Greens sats:**

$$\iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\, dA = \oint_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

- **Stokes sats:**

$$\iint_S (\operatorname{Curl} \vec{F}) \cdot \vec{N}\, dS = \oint_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

- **Gauss sats:**

$$\iiint_D (\operatorname{div} \vec{F})\, dV = \oiint_S \vec{F} \cdot \vec{N}\, dS$$

- **Gradienten, divergensen och rotationen i ett ortogonalt högerorienterat kroklinjärt koordinatsystem** $[\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}]$:

$$\nabla f = \frac{1}{h_u}\frac{\partial f}{\partial u}\hat{u} + \frac{1}{h_v}\frac{\partial f}{\partial v}\hat{v} + \frac{1}{h_w}\frac{\partial f}{\partial w}\hat{w}$$

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left(\frac{\partial}{\partial u}(F_u h_v h_w) + \frac{\partial}{\partial v}(F_v h_u h_w) + \frac{\partial}{\partial w}(F_w h_u h_v)\right)$$

$$\operatorname{Curl} \vec{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\begin{vmatrix} h_u\hat{u} & h_v\hat{v} & h_w\hat{w} \\ \partial/\partial u & \partial/\partial v & \partial/\partial w \\ h_u F_u & h_v F_v & h_w F_w \end{vmatrix}$$

- **Några trigonometriska värden och formler:** $\sin(\pi/6) = \cos(\pi/3) = 1/2$, $\sin(\pi/3) = \cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$, $\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$, $\sin 0 = \cos(\pi/2) = 0$, $\sin(\pi/2) = \cos 0 = 1$, $\sin \pi = 0$, $\cos \pi = -1$, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$, $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$.