Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

Alestalo/Hippi

MS-A0305 Differentiaali- ja integraalilaskenta 3

Kurssitentti ja yleinen tentti 19.10.2023 klo 9.00–12.00.

Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä taulukoita. Täytä kaikki otsaketiedot kaikkiin vastauspapereihin.

Kurssitentti: Viisi parasta tehtävää otetaan mukaan arvosteluun.
Yleinen tentti: Laske kaikki kuusi tehtävää.
Jokainen kurssille I/2023 osallistunut voi halutessaan yrittää kuutta tehtävää, jolloin arvosana määräytyy paremman vaihtoehdon mukaan: "viisi parasta koetehtävää + laskaripisteet" tai "pelkät kuusi koetehtävää".

1. Puolipallon
$$K = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, z \geq 0\}$$
tiheys ρ riippuu pallokoordinaatiston muuttujista kaavan $\rho(r, \varphi, \theta) = (8 + 4\cos\varphi)r$ mukaisesti (sopivissa yksiköissä). Laske puolipallon massa
$$m = \iiint_K \rho \, dV.$$

2. a) Määritä vektorikentän $\mathbf{F}(x, y) = -3y\,\mathbf{i} + 3x\,\mathbf{j}$ viivaintegraali pisteestä $(4, 0)$ pisteeseen $(0, 4)$ origokeskisen ympyrän (lyhyempää) kaarta pitkin. (4 p.)
b) Onko a-kohdan vektorikentällä potentiaalia? (2 p.)

3. Määritä vektorikentän $\mathbf{F}(x, y) = y\,\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j}$ kenttäviivojen yhtälöt ja hahmottele kuvioon ainakin kaksi eri kenttäviivaa.

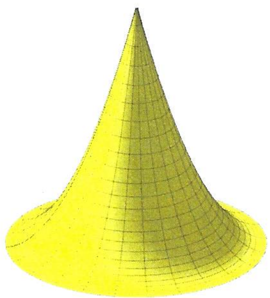
4. Laske vektorikentän $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 + y)\mathbf{i} + (y^2 - x)\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$ lähteisyys $\nabla \cdot \mathbf{F}$ ja pyörteisyys $\nabla \times \mathbf{F}$ pisteessä $(1, 2, 3)$.

5. a) Laske vektorikentän
$$\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$$
vuo puolipallon pinnan $P = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 9,\ z \geq 0\}$ läpi. Voit käyttää joko vuon määritelmää tai Gaussin lausetta, kun pinta P on ensin täydennetty umpinaiseksi pinnaksi niin, että $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = 0$ täydennetyllä osalla. (Tämä ehto täytyy myös todentaa laskulla, jos käytät Gaussin lausetta.) (5 p.)
b) Vaikuttaako vuon suunnan valinta lopputulokseen? (1 p.)

6. Eräässä tosi-TV-kilpailussa täytyy kiivetä mahdollisimman korkealle alla olevan kuvan muotoista pintaa pitkin. Pinnalla on (sopivissa yksiköissä) parametrisointi[1]

$$\mathbf{r}(u,v) = ((2-u)\cos v, (2-u)\sin v, u^2),$$

kun parametrialueena on neliö $\Omega = \{(u,v) \mid 0 \le u \le 2,\ 0 \le v \le 2\pi\}$.
a) Muodosta pinnan normaalivektori parametrien arvoja $u = 1$ ja $v = \pi$ vastaavassa pinnan pisteessä. (3 p.)
b) Määritä a-kohdan normaalin avulla pinta-alan paikallinen suurennussuhde ja pinnan kaltevuuskulmalle α lauseke $\cos\alpha$ kyseessä olevassa pisteessä. (3 p.)
c) Kaltevuuskulman α likiarvo on 63°. Pystyisitkö kiipeämään tälle korkeudelle, jos pinnan muoto on sama ja huippu 10 metrin korkeudessa? (0 p.)



Eräitä kaavoja:

- $\dfrac{dx}{F_1(x,y)} = \dfrac{dy}{F_2(x,y)}$
- $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1 \longleftrightarrow x = a\cos t,\ y = b\sin t$
- $\nabla\cdot(\nabla f) = \Delta f$, $\nabla\times\nabla f = \bar{0}$, $\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{F}) = 0$
- $\nabla\cdot(f\mathbf{F}) = \nabla f\cdot\mathbf{F} + f(\nabla\cdot\mathbf{F})$, $\nabla\times(f\mathbf{F}) = \nabla f\times\mathbf{F} + f(\nabla\times\mathbf{F})$
- $\displaystyle\oint_{\partial D} F_1\,dx + F_2\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dA$
- Tällä kurssilla $\mathbf{n}$ = yksikkönormaali.
- $\displaystyle\iiint_D \nabla\cdot\mathbf{F}\,dV = \iint_{\partial D} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS$
- $\displaystyle\iint_P (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,dS = \oint_{\partial P} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \oint_{\partial P} F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz$
- (r,φ,θ): $x = r\sin(\varphi)\cos(\theta)$, $y = r\sin(\varphi)\sin(\theta)$, $z = r\cos(\varphi)$, $dV = r^2\sin(\varphi)\,dr\,d\varphi\,d\theta$
- $(r_\perp,\theta,z)$: $x = r_\perp\cos(\theta)$, $y = r_\perp\sin(\theta)$, $z = z$, $dV = r_\perp\,dr_\perp\,d\theta\,dz$
- $\sin(\pi/6) = \cos(\pi/3) = 1/2$, $\sin(\pi/3) = \cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$, $\sin 0 = \cos(\pi/2) = 0$, $\sin(\pi/2) = \cos 0 = 1$, $\sin\pi = 0$, $\cos\pi = -1$, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\sin(2x) = 2\sin x\cos x$, $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$.

Huom. 1: Kurssin palautekyselyyn vastaamisesta saa yhden koepisteen!
Huom. 2: Kurssitentin voi uusia seuraavan tentin yhteydessä. **Myös uusijoiden täytyy ilmoittautua tenttiin.**

[1] Tämä saadaan aikaan kiertämällä paraabelin kaarta kuten laskuharjoitusten torus-tehtävässä ympyrää.