**PHYS-C0220 Termodynamiikka ja statistinen fysiikka**
**Tentti 22.2.2024 [5 tehtävää, 2 sivua]**
Ylioppilaskirjoituksissa hyväksytty laskin on sallittu, taulukkokirjat ja muut kaavakokoelmat eivät ole sallittuja. Jokainen tehtävä on pisteiltään samanarvoinen. Paperin kääntöpuolelta löydät mahdollisesti hyödyllisiä kaavoja.

**Tehtävä 1.**
Selitä lyhyesti ja ytimekkäästi seuraavat käsitteet. Huom! Pelkkä (mahdollinen) matemaattinen määritelmä ei ole riittävä.
a) Ensemble eli tilastollinen joukko
b) Klassinen ekvipartitioteoreema
c) Kemiallinen potentiaali
d) Fermilämpötila

**Tehtävä 2.**
Mitä ovat *termodynaamiset potentiaalit*? Mikä on niiden fysikaalinen perusta ja mihin niitä käytetään?

Mikä olisi oikea termodynaaminen potentiaali, kun tarkastellaan a) ilmassa olevien molekyylien liukenemista astiassa olevaan nesteeseen; b) kahden kokoonpuristumattoman nesteen molekyylien sekoittumista vakiolämpötilassa? Perustele vastauksesi huolellisesti.

**Tehtävä 3.**
Olkoon tarkastellun systeemin mahdolliset energiatilat diskreetti joukko $0, \varepsilon, 2\varepsilon, 3\varepsilon, ..., (N-1)\varepsilon$. Osoita, että systeemin partitiofunktio voidaan kirjoittaa

$$Z = \frac{1 - e^{-N\beta\varepsilon}}{1 - e^{-\beta\varepsilon}}.$$

Määritä sitten partitiofunktion avulla systeemin sisäenergia $U$ ja lämpökapasiteetti vakiotilavuudessa, $C_V$. Hahmottele näiden kuvaajat huomioiden erityisesti hyvin matalan ja hyvin korkean lämpötilan rajat. Mitä samankaltaisuuksia ja toisaalta eroja systeemin sisäenergialla ja lämpökapasiteetilla on kvanttimekaanisen harmonisen värähtelijän vastaavien ominaisuuksien kanssa?

**Tehtävä 4.**
Tarkastellaan fotonikaasua säiliössä, jonka tilavuus on $V$. Oletetaan, että fotonikaasu on termodynaamisessa tasapainossa säiliön seinien kanssa lämpötilassa $T$. Fotonien tilatiheys on $g(\omega) = V\omega^2/(\pi^2 c^3)$. Osoita, että säiliössä olevien fotonien lukumäärän odotusarvo on muotoa

$$\langle N \rangle = \alpha \frac{V}{(\beta\hbar c)^3},$$

jossa $\alpha$ on dimensioton kerroin. Osoita lisäksi, että fotonikaasun lämpökapasiteetti vakiotilavuudessa $C_V \propto T^3$.

**Tehtävä 5.**
Amfifiiliset yhdisteet ovat molekyylejä, joissa on sekä vesiliukoinen (hydrofilinen) että rasvaliukoinen (hydrofobinen) osa. Lisättäessä tällaisia molekyylejä veteen havaitaan, että pienillä konsentraatioilla amfifiiliset molekyylit hakeutuvat ilma/vesi-rajapintaan. Samalla vesiliuoksen pintajännityksen havaitaan laskevan.

Kun amfifiilisten molekyylien konsentraatiota lisätään vielä lisää, havaitaan mielenkiintoinen ilmiö. Tietyn rajakonsentraation jälkeen lisätyt molekyylit eivät enää hakeudukaan ilma/vesi-rajapintaan, vaan alkavat sen sijaan muodostaa vesiliukoisia aggregaatteja vesifaasin sisälle. Yksinkertaisimmillaan tällaiset rakenteet ovat pallomaisia *misellejä*, joissa molekyylien rasvaliukoinen osa on rakenteen sisällä, kun taas vesiliukoinen osa on kosketuksissa vesimolekyylien kanssa. Makroskooppisesti tämä aggregaattien muodostuminen havaitaan mm. liuoksen viskositeetin kasvuna.

Oletetaan sitten, että sinun tulisi tehdä analyyttinen tarkastelu joidenkin tiettyjen amfifiilisten molekyylien jakautumiselle vesifaasin ja ilma/vesi-rajapinnan välille, sekä itse misellien muodostumisen termodynamiikalle. Lopullisena tarkoituksena olisi tuottaa teoreettinen ennuste yllä mainitulle misellien muodostumisen rajakonsentraatiolle.

Mihin termodynamiikan ja statistisen fysiikan periaatteisiin perustaisit teoreettisen tarkastelusi? Selitä sanallisesti ja kuvien avulla. Entä miten voisit parametrisoida ja kokeellisesti testata malliasi?

*Huom! Sinun ei tarvitse tässä varsinaisesti tehdä tätä analyyttistä tarkastelua. Tehtävän ajatuksena on osoittaa miten hyvin olet omaksunut termodynamiikan ja statistisen fysiikan perusteita, sekä miten osaisit näiden avulla lähestyä aitoa tutkimusongelmaa.*

---

**Seuraavista kaavoista voi olla apua**

- Geometrinen sarja $a\sum_{n=0}^{\infty} r^n = a/(1-r)$, kun $|r| < 1$
- Katkaistu geometrinen sarja $a\sum_{n=0}^{N-1} r^n = a(1-r^N)/(1-r)$, kun $|r| < 1$
- Stirlingin approksimaatio: $\ln N! \approx N\ln N - N$
- $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$
- $\int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^5}}$
- $\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = n!$
- $\tanh x \approx x - \frac{x^3}{3}$, $|x| \ll 1$.
- $\sinh x \equiv \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.
- $\cosh x \equiv \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.
- $\frac{d}{dx}\tanh x = 1 - \tanh^2 x = \mathrm{sech}^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}$