Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu Alestalo/Nyman
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

MS-A0301 Differentiaali- ja integraalilaskenta 3

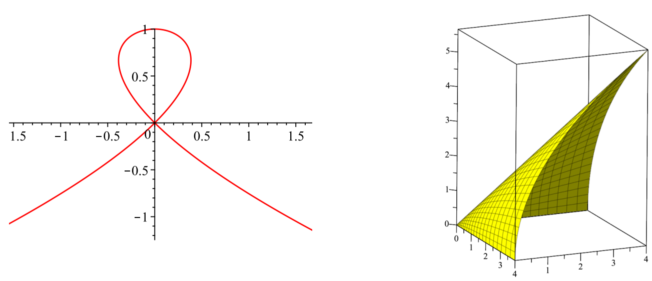
Kurssitentti ja yleinen tentti 17.4.2024 klo 9.00–12.00.

Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä taulukoita. Täytä kaikki otsaketiedot kaikkiin vastauspapereihin.

Kurssitentti: Viisi parasta tehtävää otetaan mukaan arvosteluun.
Yleinen tentti: Laske kaikki kuusi tehtävää.
Jokainen kurssille IV/2024 osallistunut voi halutessaan palauttaa kuusi tehtävää, jolloin arvosana määräytyy paremman vaihtoehdon mukaan: ”viisi parasta koetehtävää + laskaripisteet” tai ”pelkät kuusi koetehtävää”.

1. Pallon
$$B = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$$
lämpötila T laskee lineaarisesti pallokoordinaatiston muuttujan r suhteen keskipisteen arvosta 6000 pinnan arvoon 0, jolloin $T(r) = 6000(1 - r/R)$ välillä $0 \leq r \leq R$. Laske pallon keskilämpötila
$$\overline{T} = \frac{1}{V} \iiint_B T\, dV.$$
Pallon tilavuus $V = 4\pi R^3/3$ oletetaan tunnetuksi.

2. a) Selitä jonkin kurssilla käsitellyn kaavan avulla, miksi viivaintegraalin
$$\oint_C x\, dy$$
arvo on umpinaisen ja itseään leikkaamattoman tasokäyrän C sisäpuolelle jäävän alueen pinta-ala tai sen vastaluku. (2 p.)
b) Laske a-kohdan kaavaa käyttämällä silmukan $x = t^3 - t$, $y = 1 - t^2$, $-1 \leq t \leq 1$, sisään jäävä pinta-ala. (4 p.)



Tehtäviin 2 ja 6 liittyvät kuvat.

3. Määritä vektorikentän $\mathbf{F}(x, y, z) = (2xyz + \sin x)\mathbf{i} + x^2 z\mathbf{j} + x^2 y\mathbf{k}$
a) skalaaripotentiaali ja
b) viivaintegraali pitkin käyrää C, jolla on parametrisointi $\mathbf{r}(t) = (3t, 4t^2, 3t^2)$ välillä $-\pi \leq t \leq \pi$.

4. a) Laske vakiovektorikentän
$$\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + \mathbf{k}$$
vuo pinnan $z = \sin x + \cos y + 3$, $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \pi$ läpi. (5 p.)
b) Miksi vuon laskeminen Gaussin lauseen avulla näyttää hankalalta, jos pinta täydennetään ensin umpinaiseksi? (1 p. Saa olla myös eri mieltä.)

5. Tarkastellaan 3-ulotteisia vektorikenttiä

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(x,y,z) &= (2x+3z)\mathbf{i} + (4x-2y)\mathbf{j} + (5x-6y)\mathbf{k},\\ \mathbf{G}(x,y,z) &= xyz\,\mathbf{i}.\end{aligned}$$

Tutki kummankin kentän kohdalla, toteuttaako kenttä koko avaruudessa
a) lähteetömyysehdon $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$,
b) pyörteettömyysehdon $\nabla \times \mathbf{F} = \overline{0}$, tai
c) ehdon[1] $\mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$.
Huom: Tietysti vastaavat merkinnät kentälle $\mathbf{G}$.

6. Arkkitehti suunnitteli ulkoilmakonserttilavan katoksen, jonka muotoa kuvaa parametrisointi

$$\mathbf{r}(u,v) = (u^2, v^2, \sqrt{2}\,uv),$$

kun parametrialueena on neliö $\Omega = \{(u,v) \mid 0 \le u \le 2,\ 0 \le v \le 2\}$.
a) Muodosta pinnan normaalivektorin lauseke ja osoita, että pinnan kaltevuuskulma on $45°$ sillä janalla, joka vastaa parametrien arvoja $u = v \in [0,2]$. (2 p.)
b) Osoita, että pinta-alan paikallinen suurennussuhde on muotoa $2\sqrt{2}\,(u^2+v^2)$, ja laske katoksen pinta-ala. (4 p.)

Eräitä kaavoja:

- $\nabla \cdot (\nabla f) = \Delta f$, $\nabla \times \nabla f = \overline{0}$, $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$
- $\nabla \cdot (f\mathbf{F}) = \nabla f \cdot \mathbf{F} + f(\nabla \cdot \mathbf{F})$, $\nabla \times (f\mathbf{F}) = \nabla f \times \mathbf{F} + f(\nabla \times \mathbf{F})$
- $\displaystyle\oint_{\partial D} F_1\,dx + F_2\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dA$
- $\mathbf{N} = -f_x\mathbf{i} - f_y\mathbf{j} + \mathbf{k}$ tai $\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$
- Tällä kurssilla $\mathbf{n}$ = yksikkönormaali.
- $\displaystyle\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\,dV = \iint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\,dS$
- $\displaystyle\iint_P (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\,dS = \oint_{\partial P} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{\partial P} F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz$
- (r,φ,θ): $x = r\sin(\varphi)\cos(\theta)$, $y = r\sin(\varphi)\sin(\theta)$, $z = r\cos(\varphi)$, $dV = r^2\sin(\varphi)\,dr\,d\varphi\,d\theta$
- $(r_\perp,\theta,z)$: $x = r_\perp\cos(\theta)$, $y = r_\perp\sin(\theta)$, $z = z$, $dV = r_\perp\,dr_\perp\,d\theta\,dz$
- $\sin(\pi/6) = \cos(\pi/3) = 1/2$, $\sin(\pi/3) = \cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$, $\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$, $\sin 0 = \cos(\pi/2) = 0$, $\sin(\pi/2) = \cos 0 = 1$, $\sin\pi = 0$, $\cos\pi = -1$, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\sin(2x) = 2\sin x\cos x$, $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$.

Huom. 1: Kurssin palautekyselyyn vastaamisesta saa yhden pisteen, joka lisätään muihin skaalattuihin pisteisiin (max = 100).
Huom. 2: Kurssitentin voi uusia V-periodin tai syyslukukauden alun tentin yhteydessä. **Myös uusijoiden täytyy ilmoittautua tenttiin.**

[1] Tämän ominaisuuden englanninkielinen nimi on 'complex lamellar vectorfield'.