



Aalto-yliopisto

Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

Loppukoe, uusintatentti, tentti 19.4.2024 klo. 13:00-16:00

MS-A0203 Differentiaali- ja integraalilaskenta 2	Malinen
MS-A0204 Differentiaali- ja integraalilaskenta 2	Alestalo
MS-A0205 Differentiaali- ja integraalilaskenta 2	Malinen

Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä taulukoita. Täytä selkeällä käsialalla **kaikki** otsaketiedot kuten nimesi ja opiskelijanumerosi kaikkiin vastauspapereihin.

Loppukoe tai uusintatentti: Viisi parasta tehtävää huomioidaan arvostelussa.
Yleinen tentti: Laske kaikki kuusi tehtävää.

Jokainen voi yrittää kuutta tehtävää, jolloin arvosana määräytyy paremman vaihtoehdon mukaan: "viisi parasta koetehtävää + voimassa olevat laskaripisteet" tai "pelkät kuusi koetehtävää".

1. Tarkastellaan spiraalia $x = e^{-t} \cos(t)$, $y = e^{-t} \sin(t)$, kun $t \in \mathbb{R}$.
 - a) Määritä parametrin arvoa $t = \pi$ vastaava tangenttivektori. (2 p)
 - b) Laske spiraalin yhden kierroksen $0 \leq t \leq 2\pi$ kaarenpituus. (4 p)
2. Tarkastellaan yhtälön $x^2 - y^2 = 1$ määräämää hyperbeliä ja yhtälön $2x^2 + y^2 = 2$ määräämää ellipsiä.
 - a) Määritä käyrien leikkauspisteet. (2 p)
 - b) Osoita, että käyrillä on yhteinen tangenttisuora a-kohdassa määritetyissä leikkauspisteissä. (4 p)

KÄÄNNÄ!

3. Funktioista $g(t)$ ja $h(t)$ tiedetään ominaisuudet

$$g(2) = -3, h(2) = 4, g'(2) = 5, h'(2) = -6,$$

ja funktiosta $f(x, y)$ osittaisderivaatat

$$f_x(-3, 4) = -7 \text{ ja } f_y(-3, 4) = 8.$$

Laske yhdistetyn funktion $f(g(t), h(t))$ derivaatta kohdassa $t = 2$. (6 p)

4. Määritä funktion $f(x, y, z) = x - y^2 + z$ suurin ja pienin arvo pinnalla $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ Lagrangen kertojien avulla. (6 p)

5. a) Laske napakoordinaattimuunnoksen $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, Jacobin determinantti eli pinta-alan paikallinen suurennussuhde. (2 p)

b) Suppeneeko epäoleellinen tasointegraali

$$\iint_B \frac{1}{1+x^2+y^2} dA,$$

kun $B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 1\}$? (4 p)

Vihje: $\frac{d}{dr} \ln(1+r^2) =$ jotain hyödyllistä.

6. Tarkastellaan kuvion mukaista tasojoukkoa $N =$ nuolenkärki.

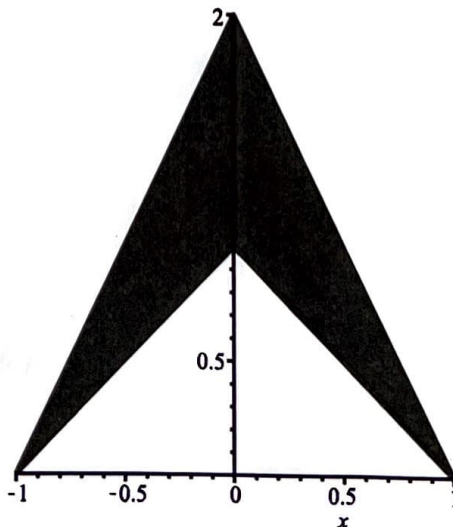
a) Anna joukon N oikean puolen reunajanojen yhtälöt välillä $0 \leq x \leq 1$. (2 p)

b) Laske joukon N keskiön (eli massakeskipisteen) y -koordinaatti

$$\bar{y} = \frac{1}{A} \iint_N y dA.$$

Missä joukon N keskiö sijaitsee? (4 p)

Vihje: Symmetrian vuoksi riittää laskea tasointegraali vain joukon N oikeassa puolikkaassa.



KÄÄNNÄ!