ELEC-C1230 Säätötekniikka
Välikoe 2. 18.4.2024 Ratkaisut

1. Systeemin tilaesitys on

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t).$$

a. Onko systeemi saavutettava? Entä onko se tarkkailtava? (2p)

b. Jos mahdollista, suunnittele systeemille tilatarkkailija siten, että estimointivirheen dynamiikkaa kuvaavan systeemin navat ovat -1 ja -2 . (3p)

c. Selitä yleisellä tasolla, miten tarkkailtavuus liittyy tilatarkkailijan suunnitteluun? (1p)

Ratkaisut:

a. Laskemalla ohjattavuus- ja havaittavuusmatriisit saadaan

$$\mathbf{M}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{M}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

joista saadaan $\mathrm{rank}(\mathbf{M}_c) = 1$ ja $\mathrm{rank}(\mathbf{M}_o) = 2$, eli systeemi on tarkkailtava mutta ei saavutettava.

b. Systeemi on a-kohdan perusteella tarkkailtava, joten estimointivirheen dynamiikkaa kuvaavan systeemin navat voidaan sijoitella vapaasti. Tilahavaitsija on muotoa

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{KC})\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}u(t) + \mathbf{K}y(t),$$

ja estimointivirheen dynamiikan navat ovat matriisin $\mathbf{A} - \mathbf{KC}$ navat. Merkitään $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$ ja lasketaan estimointivirheen pienenemistä kuvaava karakteristinen yhtälö:

$$\begin{aligned} \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{KC}) &= \det\left(s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= \det \begin{bmatrix} s - 1 + k_1 & -1 \\ k_2 & s - 2 \end{bmatrix} \\ &= (s - 1 + k_1)(s - 2) + k_2 = s^2 + (k_1 - 3)s + (k_2 - 2k_1 + 2). \end{aligned}$$

Jotta navat olisivat -1 ja -2, niin karakteristisen yhtälön pitäisi olla $(s+1)(s+2) = s^2 + 3s + 2$. Asettamalla s:n potenssien kertoimet yhtä suuriksi saadaan yhtälöpari tilatarkkailijan parametereille k_1 ja k_2:

$$\begin{cases} k_1 - 3 = 3 \\ k_2 - 2k_1 + 2 = 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad k_1 = 6 \quad \Rightarrow \quad k_2 = 2k_1 = 12,$$

eli $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \end{bmatrix}$.

c. Mikäli systeemi on tarkkailtava, niin tilaestimaattorilla voidaan estimoida tilojen käyttäytyminen (estiestimointivirheen dynamiikkaa kuvaavan systeemin navat voidaan asetella mielivaltaisesti). Mikäli systeemi ei ole tarkkailtava, mutta ei-tarkkailtavat tilat ovat asymptoottisesti stabiileja, niin osa systeemin tiloista voidaan estimoida. Toisin sanoen, jos löytyy sellainen matriisi $\mathbf{K}$, että matriisi $\mathbf{A} - \mathbf{KC}$ on asympttoottisesti stabiili, niin silloin tilaestimoinnin virhe menee asymptoottisesti nollaan. Tällainen matriisi löytyy aina, jos systeemi on tarkkailtava, mutta myös silloin, jos systeemin ei-tarkkailtavat tilat ovat asymptoottisesti stabiileja.

2. Negatiivisesti takaisinkytketyssä järjestelmässä avoimen järjestelmän siirtofunktio (luupinsiirtofunktio) on

$$G(s) = \frac{e^{-T_d s}}{s^2 + s + 1},$$

joka oletetaan aluksi viiveettömäksi, eli $T_d = 0$.

a. Määritä ne kulmataajuudet, joilla vahvistuskäyrä leikkaa 0 dB rajan (ns. vahvistuksen ylimenotaajuus) ja vaihekäyrä leikkaa $-180°$ rajan (ns. vaiheen ylimenotaajuus). (2p)

b. Määritä a-kohdan perusteella suljetun järjestelmän vahvistus- ja vaihevarat. (2p)

c. Oletetaan seuraavaksi, että järjestelmässä on viivettä, eli $T_d > 0$. Selitä sanallisesti, miten viive vaikutaa vahvistus- ja vaihevaroihin. Määritä suurin viiveen T_d arvo, jolla suljettu järjestelmä on stabiili. (2p)

Ratkaisut:

a. Vahvistuskäyrä leikkaa 0 dB rajan sillä taajuudella $\omega > 0$, jolla $|G(j\omega)| = 1$. Lasketaan ensin

$$G(j\omega) = \frac{1}{-\omega^2 + j\omega + 1} = \frac{1}{1 - \omega^2 + j\omega},$$

ja ratkaistaan sitten taajuus, jolla $|G(j\omega)| = 1$, eli

$$1 = \frac{1}{\sqrt{(1-\omega^2)^2 + \omega^2}} \quad \Leftrightarrow \quad 1 = \frac{1}{1 - \omega^2 + \omega^4},$$

josta saadaan $0 = \omega^4 - \omega^2 = \omega^2(1 - \omega^2)$. Tämän ratkaisuna saadaan $\omega = \pm 1$ tai $\omega = 0$, joista $\omega = 1$ on ainoa positiivinen vaihtoehto. Vahvistuskäyrä leikkaa siis 0 dB rajan taajuudella $\omega = 1$.

Lasketaan seuraavaksi vaihe, josta saadaan

$$\angle\{G(j\omega)\} = \angle\{1\} - \angle\{1 - \omega^2 + j\omega\} = \begin{cases} -\arctan\left(\frac{\omega}{1-\omega^2}\right), & \omega^2 < 1 \\ -\arctan\left(\frac{\omega}{1-\omega^2}\right) - \frac{\pi}{2} & \omega^2 > 1 \end{cases}.$$

Vaiheen pitäisi olla $-180° = -\pi$ (radiaania), mutta koska arkustangentti saa arvoja vain välillä $(-\pi/2, \pi/2)$, niin vaihe ei koskaan saavuta arvoa $-\pi$, vaan ainoastaan lähestyy sitä asymptoottisesti, kun ω lähestyy ääretöntä.

b. Määritetään vaihe taajuudella $\omega = 1$, jonka perusteella saadaan määritettyä vaihevara. Vahvistusvara onkin ääretön, koska vaihekäyrä ei koskaan leikkaa arvoa $-180°$.

$$\angle\{G(1j)\} = \angle\left\{\frac{1}{1 - 1 + 1j}\right\} = \angle\{-1j\} = -\frac{\pi}{2}.$$

Etäisyys tästä kriittiseen vaiheeseen $-180° = -\pi$ (radiaania) on $-\pi/2 - (-\pi) = \pi/2$, eli vaihevara on $\pi/2$ eli 90 astetta.

c. Jos järjestelmässä on viivettä, niin viive ei vaikuta vahvistukseen mutta pudottaa vaihekäyrää kaikilla (positiivisilla) taajuuksilla, mikä johtaa sekä vahvistus- että vaihevaran putoamiseen. Koska viiveettömän tapauksen vaihevara on b-kohdan perusteella $\pi/2$ (eli $90°$), niin vaihetta on vara pudottaa täsmälleen $\pi/2$ (eli $90°$), ennen kuin suljetusta järjestelmästä tulee epästabiili. Koska viive ei vaikuta vahvistukseen, niin vahvistuksen ylimenotaajuus on edelleen $\omega = 1$, josta saadaan ratkaistua T_d

$$-\pi = \angle\{G(1j)\} = \angle\{e^{-jT_d}\} + \angle\{-1j\} = -T_d - \frac{\pi}{2},$$

eli vaihekäyrä putoaa $90°$ kohdassa $\omega = 1$, kun viive on $T_d = \pi/2$. Suljettu järjestelmä on siis stabiili, kun viive on korkeintaan $\pi/2$. (Tätä ei kysytty, mutta arvolla $T_d = \pi/2$ suljettu järjestelmä on marginaalisesti stabiili, ja arvoilla $T_d < \pi/2$ se on asymptoottisesti stabiili.)

3. Negatiivisesti takaisinkytketyssä järjestelmässä avoimen järjestelmän siirtofunktio (luupinsiirtofunktio) on

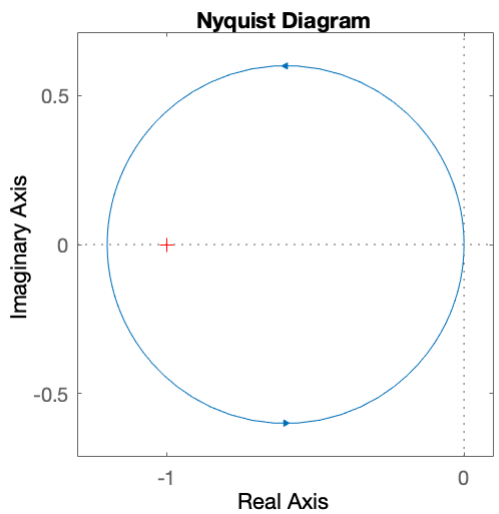
$$L(s) = G_c(s)G(s) = \frac{K}{s-1}.$$

Alla on esitetty avoimen järjestelmän Nyquistin diagrammi eräällä parametrin $K > 0$ arvolla.

a. Määritä käyttämällä Nyquistin stabiilisuuslausetta, onko kyseistä Nyquistin diagrammia vastaava suljettu järjestelmä stabiili. (2p)

b. Määritä laskemalla (analyyttisesti), missä pisteessä Nyquistin diagrammi leikkaa negatiivisen reaaliakselin. (2p)

c. Määritä b-kohdan ja Nyquistin stabiilisuuslauseen avulla, millä parametrin K arvoilla suljettu järjestelmä on asymptoottisesti stabiili. (2p)



Ratkaisut:

a. Nyquistin stabiilisuuslauseen mukaan $Z = N + P$, missä Z on suljetun järjestelmän oikeassa puolitasossa olevien napojen lukumäärä, P on avoimen järjestelmän oikeassa puolitasossa olevien napojen lukumäärä, ja N on Nyquistin diagrammin kierrosten määrä pisteen $(-1, 0)$ ympäri (plus tai miinus, riippuen kierroista myötä- tai vastapäivään). Tässä tapauksessa avoimella järjestelmällä on yksi napa ($s = 1$) oikeassa puolitasossta, ja Nyquistin diagrammi kiertää pisteen $(-1, 0)$ kertaalleen vastapäivään, eli suljetun järjestelmän oikeassa puolitasossa olevien napojen lukumäärä on $Z = -1 + 1 = 0$, eli suljettu järjestelmä on stabiili (ei napoja oikeassa puolitasossa).

b. Kun Nyquistin diagrammi leikkaa negatiivisen reaaliakselin, niin luupinsiirtofunktion imaginaariosa on nolla ja sen reaaliosa on negatiivinen. Laventamalla saadaan

$$L(j\omega) = \frac{K}{j\omega - 1} = -\frac{K(j\omega + 1)}{\omega^2 + 1} = -\frac{K}{\omega^2 + 1} - j\frac{K\omega}{\omega^2 + 1},$$

joten imaginaariosa menee nollaksi, kun $\omega = \pm\infty$ tai $\omega = 0$. Koska kahdessa ensimmäisessä tapauksessa myös reaaliosa menee nollaksi, niin negatiivisen reaaliakselin leikkaaminen tapahtuu taajuudella $\omega = 0$, jolloin luupinsiirtofunktion reaaliosa on $-K$. Täten Nyquistin diagrammi leikkaa negatiivisen reaaliakselin pisteessä $(-K, 0)$.

c. Koska avoimella järjestelmällä on yksi napa oikeassa puolitasossa, niin Nyquistin diagrammin pitää kiertää piste $(-1, 0)$ kertaalleen vastapäivään, jotta suljettu järjestelmä olisi stabiilli. Koska b-kohdan perusteella Nyquistin diagrammi leikkaa negatiivisen reaaliakselin pisteessä $(-K, 0)$, piste $(-1, 0)$ jää diagrammin sisäpuolelle, kun $K \geq 1$. Kun $K = 1$, diagrammi kuitenkin leikkaa pisteen $(-1, 0)$, jolloin suljettu järjestelmä on vain asymptoottisesti stabiili, mutta kaikilla $K > 1$ piste $(-1, 0)$ jää aidosti diagrammin sisäpuolelle. Täten suljettu järjestelmä on asymptoottisesti stabiili, kun $K > 1$. (Diagrammihan on tässä tapauksessa aina ympyrän muotoinen, ja parametrin K arvon kasvattaminen siirtää kaikkia diagrammin pisteitä kauemmaksi origosta.)

4. Selitä käsitteet (lyhyt kuvaus riittää, kunhan siitä voidaan todeta, että olet ymmärtänyt asian)

a. asettumisaika, (1p)

b. resonanssitaajuus, (1p)

c. kaistanleveys, (1p)

d. vaiheen johtopiiri, (1p)

e. Alias-ilmilö eli taajuuden laskostuminen, (1p)

f. integraattorin windup-ilmiö. (1p)

Ratkaisut:

a. Yleensä puhutaan 2% tai 5% asettumisajasta, eli aika, jonka jälkeen vaste pysyy $\pm 2\%$ (vastaavasti $\pm 5\%$) sisällä referenssistä.

b. Taajuus, jolla aiheutuu resonanssipiikki Boden diagrammin vahvistuskäyrään. Erityisesti toisen kertaluvun värähtelevässä dynamiikassa kompleksisen napaparin aiheuttama.

c. Kaistanleveys on se taajuusalue, jolla säätö on tehokasta, eli/tai suljetun systeemin taajuusvasteen vahvistus ei vielä putoa tiettyä rajaa alemmaksi. Esimerkiksi 3 dB kaistanleveys tarkoittaa sitä taajuusaluetta $[0, \omega_B]$, jolla suljetun järjestelmän vahvistus ei putoa alle -3 dB, tai toisaalta ω_B on juuri se taajuus, jolla vahvistus putoaa -3 dB.

d. Vaiheen johtopiiri nostaa vaihetta (ja vahvistusta) halutulla taajuusalueella. kasvattaa kaistanleveyttä, ja lisää samalla suljetun järjestelmän nopeutta. Voidaan käyttää esimerkiksi vaihevaran lisäämiseen.

e. Jos jatkuvaa signaalia näytteistettäessä näytteistystaajuus ei ole riittävän suuri, niin signaalin spektri ei mahdu näytteistysalueelle, vaan seuraa taajuuden laskostuminen. Laskostumisen seurauksena näytteistä ei voida yksikäsitteisesti päätellä alkuperäistä signaalia. Esimerkiksi eritaajuiset sinimuotoiset signaalit saattavat tuottaa täysin identtiset näytejoukot, jolloin sanotaan, että nämä signaalit ovat toistensa aliaksia (kyseisellä näytteenottotaajuudella).

f. Integraattorin windup-ilmiö tarkoittaa sitä, että virhetilanteen (esim. toimilaitteen saturoitumisen) vuoksi erosuure ei mene nollaan (säätö ei kykene toimimaan), ja integroiva termi jatkaa kasvamistaan suuriin arvoihin. Virhetilanteen korjaannuttua integraattori palaa hitaasti järkeviin arvoihin, eli säätö toimii epäoptimaalisesti (erosuureen pysyvä poikkeama korjaantuu hitaasti).