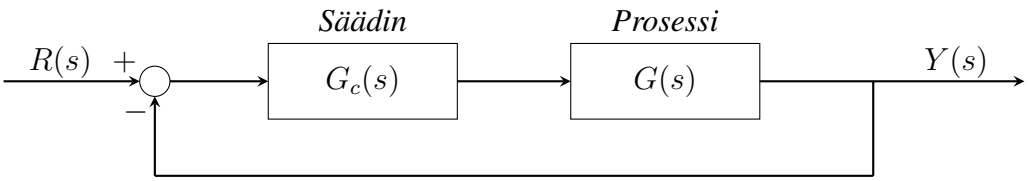
ELEC-C1230 Säätötekniikka
Tentti 18.4.2024 Ratkaisut

1. Tarkastellaan säätöjärjestelmää, jota kuvaa oheinen lohkokaavio



jossa säädin on $G_c(s) = \dfrac{K(s+1)}{s}$ ja prosessia kuvaa siirtofunktio $G(s) = \dfrac{1}{s^2+2s-3}$.

a. Millä parameterin K arvoilla järjestelmä on asymptoottisesti stabiili? (3p)

b. Kun säädin on viritetty siten, että järjestelmä on asymptoottisesti stabiili, mikä on lähtösuureen asymptoottinen arvo, kun referenssinä on yksikköaskel? (1p)

c. Onnistuuko säädin b-kohdan askelreferenssin seurannassa? Mikä säädin on kyseessä? Onko saatu tulos tyypillinen kyseiselle säätimelle? Perustele vastauksesi. (2p)

Ratkaisut:

a. Lasketaan aluksi järjestelmän siirtofunktio

$$G_{tot} = \frac{G_c(s)G(s)}{1+G_c(s)G(s)} = \frac{\frac{K(s+1)}{s(s^2+2s-3)}}{1+\frac{K(s+1)}{s(s^2+2s-3)}} = \frac{K(s+1)}{s^3+2s^2+(K-3)s+K}.$$

Selvitetään seuraavaksi Routhin kaavion avulla, millä parametrin K arvoilla järjestelmällä ei ole napoja oikeassa puolitasossa:

$$\begin{array}{c|cc}
s^3 & 1 & K-3 \\
s^2 & 2 & K \\
s^1 & -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & K-3 \\ 2 & K \end{vmatrix} = \frac{K-6}{2} & 0 \\
s^0 & -\frac{2}{K-6}\begin{vmatrix} 2 & K \\ \frac{K-6}{2} & 0 \end{vmatrix} = K & 0
\end{array}$$

Kaavion ensimmäisen sarakkeen alkiot ovat positiivisia, kun $K > 6$, joten säädetty järjestelmän on asymptoottisesti stabiili, kun $K > 6$.

b. Kun parametri K on valittu, siten, että järjestelmä on asympttoottisesti stabiili, niin lähtösuureen asymptoottinen arvo voidaan määrittää loppuarvoteoreeman avulla, tai suoremmin laskemalla staattinen vahvistus, eli

$$\lim_{s\to 0} G_{tot}(s) = \lim_{s\to 0} \frac{K(s+1)}{s^3+2s^2+(K-3)s+K} = \frac{K}{K} = 1,$$

minkä perusteella lähtösuure asettuu asympttoottisesti arvoon 1 (kaikilla $K > 6$).

c. Lähtösuure asettuu b-kohdan perusteella asymptoottisesti referenssiarvoon 1, joten säädin onnistuu referenssin seurannassa. Kysessä on PI-säädin, perinteisemmässä muodossaan esitettynä $G_c(s) = K\left(1+\dfrac{1}{T_I s}\right)$, jossa integrointiaika on asetettu $T_I = 1$. Tulos on tyypillinen PI-säätimelle, koska integroiva termi poistaa pysyvän poikkeaman (avoimesta silmukasta tulee tyypin 1 prosessi, jolloin pysyvä poikkeama vakioreferenssille on nolla).

2. Systeemin tilaesitys on

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t).$$

a. Onko systeemi saavutettava? Entä onko se tarkkailtava? (1p)

b. Jos mahdollista, suunnittele systeemille tilasäätäjä $u(t) = -\mathbf{L}\mathbf{x}(t)$ siten, että säädetty järjestelmä on asymptoottisesti stabiili. Systeemin tilan voi olettaa tunnetuksi. (2p)

c. Selitä yleisellä tasolla, miten saavutettavuus liittyy tilasäätäjän suunnitteluun? (1p)

d. Jos systeemin tilaa ei tunneta, miten tilasäätäjän suunnittelua pitää muuttaa? (1p)

e. Miten tilasäätäjää pitää lisäksi muokata, jos sillä halutaan seurata nollasta poikkeavaa vakioreferenssiä asymptoottisesti? Mainitse kaksi tapaa. (1p)

Ratkaisut:

a. Laskemalla ohjattavuus- ja havaittavuusmatriisit saadaan

$$\mathbf{M}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{M}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix},$$

joista saadaan $\mathrm{rank}(\mathbf{M}_c) = 1$ ja $\mathrm{rank}(\mathbf{M}_o) = 2$, eli systeemi on tarkkailtava mutta ei saavutettava.

b. Vaikka systeemi ei olekaan saavutettava, siitä ei voida päätellä, etteikö se olisi stabiloitavissa tilatakaisinkytkennällä. Merkitään $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \ell_1 & \ell_2 \end{bmatrix}$ ja ratkaistaan säädetyn järjestelmän karakteristinen yhtälö:

$$\begin{aligned}
\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BL}) &= \det\left(s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ell_1 & \ell_2 \end{bmatrix} \right) \\
&= \det \begin{bmatrix} s + 1 - \ell_1 & 2 - \ell_2 \\ \ell_1 & s - 1 + \ell_2 \end{bmatrix} \\
&= (s + 1 - \ell_1)(s - 1 + \ell_2) - \ell_1(2 - \ell_2) \\
&= s^2 + (\ell_2 - \ell_1)s + (\ell_2 - \ell_1 - 1).
\end{aligned}$$

Toisen asteen polynomin juuret ovat vasemmassa puolitasossa, jos kaikkien termien kertoimet ovat nollaa suurempia (tämä seuraa Routhin kaaviosta tai juurien ratkaisukaavasta). Täten suljettu järjestelmä on asymptoottisesti stabiili millä tahansa valinnoilla, joilla $\ell_2 - \ell_1 > 1$. Tässä vastaukseksi tosin riittää jonkin valinnan löytäminen. Esimerkiksi voidaan valita $\ell_2 = 2$ ja $\ell_1 = 0$, jolloin säädetyllä järjestelmällä on kaksinkertainen napa pisteessä -1 (KY: $s^2 + 2s + 1 = 0$).

c. Mikäli systeemi on saavutettava, niin tilasäätäjällä voidaan asetella säädetyn järjestelmän navat mielivaltaisesti. Mikäli systeemi ei ole saavutettava, mutta ei-ohjattavat tilat ovat asymptoottisesti stabiileja (kuten b-kohdassa), niin systeemi voidaan edelleen asymptoottisesti stabiloida tilatakaisinkytkennällä. Toisin sanoen, jos löytyy sellainen

matriisi $\mathbf{L}$, että matriisi $\mathbf{A} - \mathbf{BL}$ on asympttoottisesti stabiili, niin silloin säädetyn järjestelmän tila menee asymptoottisesti nollaan. Tällainen matriisi löytyy aina, jos systeemi on saavutettava, mutta myös silloin, jos systeemin ei-ohjattavat tilat ovat asymptoottisesti stabiileja.

d. Jos systeemin tilaa ei tunneta, niin täytyy suunnitella tarkkailijapohjainen tilasäätäjä. Tällöin takaisinkytkennän tila $\mathbf{x}(t)$ korvataan tilan estimaattorilla $\hat{\mathbf{x}}(t)$, eli säätö on muotoa $u(t) = -\mathbf{L}\hat{\mathbf{x}}(t)$, ja tilatarkkailijan dynamiikka on muotoa

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{KC})\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}u(t) + \mathbf{K}y(t),$$

jossa $\mathbf{K}$ valitaan siten, että matriisi $\mathbf{A} - \mathbf{KC}$ on asymptoottisesti stabiili.

e. Jos halutaan seurata nollasta poikkeavaa vakioreferenssiä asymptoottisesti, niin yksi vaihtoehto on lisätä säätäjään etuvahvistus, jonka avulla saadaan skaalattua suljetun järjestelmän siirtofunktio siten, että sen staattinen vahvistus (referenssistä lähtösuureeseen) on 1. Toinen vaihtoehto on augmentoida integrointi tilasäätöön, jolloin integraattori poistaa pysyvät poikkeaman lähtösuureesta.

3. Alla olevassa kuvassa on toisen kertaluvun systeemin

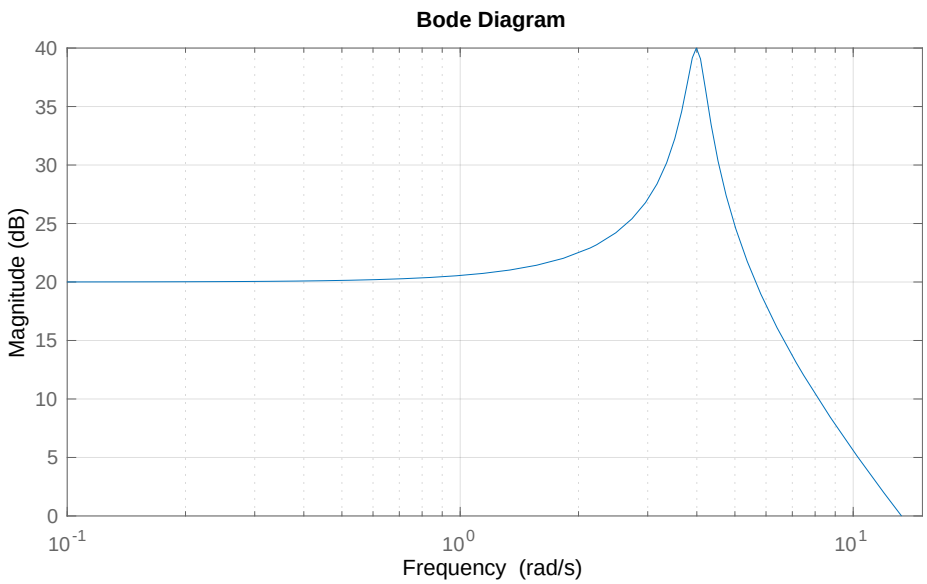
$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Boden vahvistuskäyrä.

a. Arvioi kuvan perusteella systeemin stationääritilan vahvistus K, resonanssitaajuus ja resonanssipiikin korkeus. Perustele vastauksesi. (2p)

b. Mistä resonanssipiikki johtuu? Miten siihen voidaan vaikuttaa säädöllä? (2p)

c. Arvioi a-kohdan perusteella parametrien ω_n ja ζ arvoja. Perustele vastauksesi. (2p)



Ratkaisut:

a. Kuvasta nähdään, että vahvistuskäyrä lähestyy noin 20 desibeliä, kun kulmataajuus lähestyy nollaa. Tästä syystä $20\log(G(0)) = 20\log(K) = 20$, eli $\log(K) = 1$, eli $K = 10$. Resonanssipiikki tapahtuu noin taajuudella 4 radiaania sekunnissa, joka on resonanssitaajuus, jolloin vahvistus on noin 40 desibeliä. Koska resonanssipiikin korkeus mitataan suhteessa stationääritilan vahvistukseen, piikin suuruus on noin $40 - 20 = 20$ desibeliä.

b. Toisen kertaluvun värähtelevä dynamiikka aiheuttaa taajuustasoon resonanssitaajuuden, joka aiheuttaa resonanssipiikin. Resonanssipiikki on sitä korkeampii, mitä pienempi vaimennuskerroin ζ on. Resonanssitaajuutta ei aiheudu, jos vaimennus on riittävä suuri, eli resonanssipiikistä päästään eroon vaimennusta lisäämälllä. Vaihtoehtoisesti säädöllä voidaan vaikuttaa ominaistaajuuteen ω_n, jolloin resonanssipiikkiä voidaan siirtää sellaiselle taajuusaluelle, ettei siitä ole haittaa systeemin toiminnalle.

c. Resonanssipiikin korkeuden kaava on

$$M_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-2\zeta^2}}.$$

Koska resonanssipiikki on varsin suuri, voidaan päätellä, että vaimennuskerroin ζ on lähellä nollaa, ja siksi voidaan arvioida $\sqrt{1-2\zeta^2} \approx 1$. Tällöin resonanssipiikin korkeudelle saadaan (approksimatiivinen) lauseke $M_r = 1/(2\zeta)$. Resonanssipiikin suuruudeksi arvioitiin a-kohdassa noin 20 desibeliä, eli $20\log(M_r) \approx 20$, josta saadaan $M_r \approx 10$. Täten vaimennuskertoimelle ζ saadaan arvio $\zeta \approx 1/(2M_r) \approx 1/20 = 0.05$. Tällöin $\sqrt{1-2\zeta^2} \approx 0.9975$, eli tämän termin approksimointi ykkösellä on varsin tarkkaa. Käyttämällä samaa logiikkaa resonanssitaajuuden kaavassa saadaan $\omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2} \approx \omega_n$, eli $\omega_n \approx \omega_r \approx 4$.

Vaihtoehtoisesti vaimennuskertoimen ζ arvo voitaisiin ratkaista tarkemminkin resonanssipiikin korkeuden lausekkeesta, josta saadaan neliöön korottamisen ja laventamisen jälkeen neljännen asteen polynomi $M_r^2 4\zeta^2(1-2\zeta^2) = 1$, joka voidaan kirjoittaa toisen asteen polynomina apumuuttujan $\xi = \zeta^2$ avulla, eli saadaan $M_r^2 4\xi(1-2\xi) = 1$. Tästä voidaan ratkaista juuret $\xi_1 \approx 0.4975$ ja $\xi_2 \approx 0.00251$, joiden neliöjuurista saadaan vastaavat $\zeta_1 = \sqrt{\xi_1} \approx 0.7053$ ja $\zeta_2 = \sqrt{\xi_2} \approx 0.0501$ (vain positiiviset arvot, koska $\zeta > 0$). Vaikka molemmat juuret ovat matemaattisesti järkeviä, vaimennuskerroin $\zeta_1 \approx 0.7053$ on niin suuri, että sillä ei synny kuvassa nähtyä resonanssipiikkiä, vaan oikea arvo on $\zeta_2 \approx 0.0501 \approx 0.05$, joka saatiin ratkaistua jo aiemmin approksimoimalla $\sqrt{1-2\zeta^2} \approx 1$. Vastaavasti resonanssitaajuuden lausekkeesta voitaisiin ratkaista

$$\omega_n = \frac{\omega_r}{\sqrt{1-2\zeta^2}} \approx 4.01,$$

mutta tämäkään ei mainittavasti eroa aiemmasta arviosta $\omega_n \approx 4$. (Vahvistuskäyrä on itse asiassa piirrety arvoilla $\omega_n = 4$ ja $\zeta = 0.05$.)

4. Selitä käsitteet (lyhyt kuvaus riittää, kunhan siitä voidaan todeta, että olet ymmärtänyt asian)

a. tilaesityksen linearisointi, (1p)

b. PID-säädin, (1p)

c. ei-minimivaiheinen systeemi, (1p)

d. Nyquistin stabiilisuuslause, (1p)

e. vahvistus- ja vaihevara, (1p)

f. vaiheen jättöpiiri. (1p)

Ratkaisut:

a. Linearisointi on menetelmä, jolla kehitetään epälineaarisesta tilaesityksestä lineaariapproksimaatio, joka pätee hyvin linearisointipisteen läheisyydessä. Linearisointipisteeksi valitaan yleensä tasapainotila, ja linearisoitu tilaesitys kuvaa muutosta tasapainotilan suhteen.

b. Säädin, jossa on kolme erosuureesta riippuvaa termiä: staattinen takaisinkytkentä (P), integroiva termi (I), ja derivoiva termi (D).

c. Ei-minimivaiheisella systeemillä on vähintään yksi nolla oikeassa puolitasossa ja/tai puhdas viive-elementti. Usein myös stationäärisen tilan vaihe poikkeaa nollasta.

d. $Z = N + P$, jossa P on avoimen silmukan oikeassa puolitasossa olevien napojen lukumäärä, N kertoo, montako kertaa Nyquistin diagrammi kiertää pisteen $(-1, 0)$ (plus tai miinus riippuen kierroista myötä- tai vastapäivään), ja Z on suljetun järjestelmän oikean puolitason napojen määrä. Nyquistin diagrammin pitää siis kiertää piste $(-1, 0)$ täsmälleen P kertaa vastapäivään, jotta suljettu järjestelmä olisi stabiili.

e. Vahvistusvara on amplitudisuhteen (< 1) etäisyys kriittisestä arvosta 1 (eli 0 dB) silloin, kun napakulma saa kriittisen arvon -180 astetta. Vaihevara on systeemin napakulman ($> -180°$) etäisyys kriittisestä arvosta -180 astetta silloin, kun amplitudisuhde saa kriittisen arvon 1 (eli 0 dB).

f. Vaiheen jättöpiiri pudottaa vaihetta (ja vahvistusta) halutulla alueella, vähentää kaistanleveyttä, ja hidastaa samalla suljetun järjestelmän nopeutta. Voidaan käyttää esimerkiksi korkeataajuuksisten häiriöiden vaimentamiseen/eliminoimiseen.

5. Tarkastellaan aikadiskreettiä systeemiä, jota kuvaa differenssiyhtälö

$$y(k+2) + 0.9y(k+1) + 0.2y(k) = u(k+1) + u(k).$$

a. Määritä systeemille tilaesitys. (2p)

b. Määritä systeemin pulssinsiirtofunktio. (1p)

c. Määritä systeemin navat ja nollat. Onko systeemi stabiili? (1p)

d. Määritä systeemin pulssivaste, kun tulosuureena on yksikköpulssi $\delta(k)$. (2p)

Ratkaisut:

a. Kirjoitetaan differenssiyhtälö askelsiirto-operaattorin q avulla, mistä saadaan

$$q^2y(k) + 0.9qy(k) + 0.2y(k) = qu(k) + u(k).$$

Siirtämällä q-termit oikealle (muut vasemmalle) ja ottamalla q yhteiseksi tekijäksi, saadaan

$$q\left[qy(k) + 0.9y(k) - u(k)\right] = u(k) - 0.2y(k).$$

Nyt tilamuuttujiksi voidaan ottaa ne muuttujat, joihin q operoi, eli $x_1(k) = y(k)$ ja $x_2(k) = x_1(k+1) + 0.9x_1(k) - u(k)$ (huom. $qy(k) = x_1(k+1)$), ja siten saadaan $x_2(k+1) = u(k) - 0.2x_1(k)$. Saadaan siis

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_2(k) - 0.9x(k) + u(k) \\ x_2(k+1) &= -0.2x_1(k) + u(k) \end{aligned}$$

ja edelleen tilaesitys

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \begin{bmatrix} -0.9 & 1 \\ -0.2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k). \end{aligned}$$

b. Pulssinsiirtofunktio voidaan joko laskea tilaesityksestä suoraan kaavan avulla, eli $G(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$, tai ottamalla z-muunnos differenssiyhtälöstä. Käytetään tässä jälkimmäistä tapaa, eli z-muuntamalla differenssiyhtälö saadaan (alkuarvot nolliksi)

$$(z^2 + 0.9z + 0.2)Y(z) = (z+1)U(z),$$

eli siirtofunktioksi saadaan

$$G(z) = \frac{U(z)}{Y(z)} = \frac{z+1}{z^2 + 0.9z + 0.2}.$$

c. Systeemin nollat ovat siirtofunktion osoittajan nollakohdat, eli systeemillä on yksi napa $z = -1$. Systeemin navat ovat siirtofunktion nimittäjän nollakohdat (tai tilamatriisin ominaisarvot), joiksi saadaan ratkaistua tekijöihinjaolla (tai toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla) $z^2 + 0.9z + 0.2 = (z+0.5)(z+0.4)$, eli navat ovat $z = -0.5$ ja $z = -0.4$. Molemmat navat ovat yksikköympyrän sisällä (huom. vasemmalla puolitasolla ei ole merkitystä diskreettiajassa), joten systeemi on asymptoottisesti stabiili.

d. Systeemin yksikköpulssivaste saadaan ottamalla käänteinen z-muunnos pulssinsiirtofunktiosta. Jotta siirtofunktio saadaan sopivaan muotoon, jaetaan se ensin tekijöihin

$$\frac{z+1}{z^2 + 0.9z + 0.2} = \frac{A}{z+0.5} + \frac{B}{z+0.4} = \frac{A(z+0.4) + B(z+0.5)}{z^2 + 0.9z + 0.2}.$$

Viimeisestä muodosta saadaan yhtälöpari kertoimille A ja B (ne voitaisiin laskea myös Heavisiden kaavalla)

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ 0.4A + 0.5B = 1 \end{cases}.$$

Kertomalla alempi yhtälö kahdella ja vähentämällä se ylemmästä saadaan $0.2A = -1$ eli $A = -5$, ja sijoittamalla tämä ylempään yhtälöön saadaan $B = 6$. Saadaan siis

$$\frac{z+1}{z^2+0.9z+0.2} = \frac{6}{z+0.4} - \frac{5}{z+0.5} = 6z^{-1}\frac{z}{z+0.4} - 5z^{-1}\frac{z}{z+0.5},$$

jossa viimeinen muoto on suoraan taulukon avulla muunnettavissa. Nimittäin, $\frac{z}{z+a}$-muotoisen termin käänteismuunnos on a^k, ja z^{-1}:llä kertominen vastaan yhden askeleen viivästystä. Saadaan siis käänteismuunnokseksi (ja pulssivasteeksi)

$$\begin{cases} 0, & k = 0 \\ 6 \cdot 0.4^{k-1} - 5 \cdot 0.5^{k-1}, & k = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}.$$