ELEC-C1230 Säätötekniikka
Tentti 13.5.2024 Ratkaisut

1. Tarkasteellaan systeemiä, jota kuvaa differentiaaliyhtälö

$$\ddot{y}(t) + 4y(t) = \dot{u}(t) + u(t)$$

a. Määritä systeemille tilaesitys. (2p)

b. Määritä systeemin siirtofunktio. (1p)

c. Määritä systeemin painofunktio. (1p)

d. Piirrä systeemin nolla-napa-kuvio. Mitä voit päätellä systeemin käyttäytymisestä kuvion perusteella? (2p)

Ratkaisut

a. Johdetaan tilaesitys käyttäen p-tekniikaa (ei ainoa tapa). Siirretään aluksi kaikki derivaattatermit vasemmalla ja muut termit oikealle

$$\ddot{y}(t) - \dot{u}(t) = u(t) - 4y(t)$$

ja kirjoitetaan yhtälö käyttäen derivointioperaattoria p

$$p\left\{p\left\{y(t)\right\} - u(t)\right\} = u(t) - 4y(t).$$

Nyt tiloiksi valitaan ne muuttujat, joihin p operoi, eli $x_1(t) = y(t)$ ja $x_2(t) = \dot{y}(t) - u(t) = \dot{x}_1(t) - u(t)$. Tästä saadaankin tilayhtälö $\dot{x}_1(t) = x_2(t) + u(t)$, ja lisäksi alkuperäisestä differentiaaliyhtälöstä saadaan $\dot{x}_2(t) = u(t) - 4y(t) = u(t) - 4x_1(t)$. Kirjoittamalla nämä matriisimuotoon saadaan tilaesitys

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t)\end{aligned}$$

b. Siirtofunktio voidaan laskea a-kohdan perusteella kaavalla $G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$, tai ottamalla Laplace-muunnos alkuperäisestä differentiaaliyhtälöstä ja ratkaisemalla $Y(s)/U(s)$. Käytetään tässä jälkimmäistä tapaa, josta saadaan

$$s^2Y(s) + 4Y(s) = sU(s) + U(s) \quad \Rightarrow \quad G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+1}{s^2+4}.$$

Sama tulos saadaan myös kaavalla $G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$.

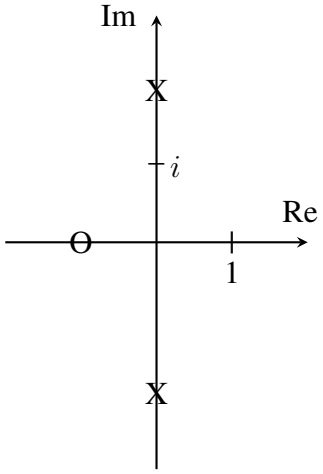
c. Systeemin painofunktio on siirtofunktion Laplace-käänteismuunnos. Siirtofunktio voidaan muuntaa suoraan taulukoiden avulla, kun kirjoitetaan

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2+4} = \frac{s}{s^2+2^2} + \frac{1}{2}\frac{2}{s^2+2^2},$$

josta saadaan taulukoiden avulla painofunktio

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+2^2}\right\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+2^2}\right\} = \cos(2t) + \frac{1}{2}\sin(2t).$$

d. Systeemin navat ja nollat ovat siirtofunktion nimittäjä- ja osoittajapolynomien nollakohdat. Osoittajapolynomi on $s+1$, joten sen nollakohta on $s=-1$. Nimittäjäpolynomi on s^2+4, jonka nollakohdiksi saadaan $s^2=-4$ eli $s=\pm 2j$. Nolla-napa-kuvio näyttää siis suunnilleen tältä:



Systeemin navat voitaisiin vaihtoehtoisesti laskea tilamatriisin $\mathbf{A}$ ominaisarvoista. Systeemin navat ovat imaginääriakselilla, joten systeemi on marginaalisesti stabiili. Lisäksi navat ovat imaginäärisiä, joten systeemin vaste on värähtelevä (kuten käy ilmi myös painofunktiosta). Systeemin kaikki nollat ovat vasemmassa puolitasossa, joten systeemi on minimivaiheinen.

2. Modifioitu PID-säädin voidaan esittää Laplace-tasossa muodossa

$$U(s) = K\left(bY_{ref}(s) - Y(s) + \frac{1}{T_I s}(Y_{ref}(s) - Y(s)) - \frac{T_D s}{1+T_D s/N}Y(s)\right).$$

a. Esitä modifioimaton PID-säädin aika- ja Laplace-tasossa. Määrittele symbolit, ja selitä, mihin säätimen eri termien toiminta perustuu. (3p)

b. Mitä modifikaatioita yllä olevassa PID-säätimessä on käytetty? Selitä, miksi tällaisia modifikaatioita käytettään. (3p)

Ratkaisut

a. PID-säädin Laplace- ja aika-tasossa löytyy kaavakokoelmasta

$$u(t) = K\left(y_{ref}(t) - y(t) + \frac{1}{T_I}\int_0^t (y_{ref}(\tau) - y(\tau))d\tau + T_D\frac{d}{dt}(y_{ref}(t) - y(t))\right)$$
$$U(s) = K\left(Y_{ref}(s) - Y(s) + \frac{1}{T_I s}(Y_{ref}(s) - Y(s)) + T_D s(Y_{ref}(s) - Y(s))\right),$$

missä K on vahvistus, T_I on integrointiaika, ja T_D on derivointiaika (voisi kirjoittaa myös vahvistuksilla $K_I = K/T_I$ ja $K_D = KT_D$, ja merkitä erosuure $e(t) = y_{ref}(t) - y(t)$). Säätimessä on kolme termiä, suhdesäätötermi (P), integroiva termi (I), ja derivoiva termi (D). Suhdesäätötermi on staattinen kuvaus erosuureesta ohjaukseen, eli se muuttuu aina, kun erosuure muuttuu. Intergroiva termi integroi erosuuretta, ja on jatkuvassa muutostilassa, kunnes erosuure menee nollaan. Integroiva

termi siis poistaa pysyvän poikkeaman erosuureesta. Dervivoiva termi seuraa erosuureen muutosnopeutta ja tavallaan ennakoi erosuureen muutoksia. Kun erosuure muuttuu, derivoiva termi yrittää vastustaa muutosta.

b. Modifioidussa säätimessä on kolme modifikaatiota: suhdesäätötermissä on erosuureen sijasta $bY_{ref}(s) - Y(s)$, derivoivassa termissä ei ole $Y_{ref}(s)$ vaan pelkkä $Y(s)$, ja derivoivaan termiin on lisätty lag termi

$$T_D s \approx \frac{T_D s}{1 + T_D s/N},$$

joissa yleensä $0 \leq b \leq 1$ ja $N \approx 4 - 10$. Käyttämällä osittaista referenssiä bY_{ref} suhdesäätötermissä voidaan joskus pehmentää vahvistustermin vaikutusta, jos referenssi muuttuu äkisti. Derivoivassa termissä käytetään pelkkää lähtösuuretta osittain samasta syystä, eli tällöin refernssin äkilliset muutokset (esim. askelmuutos) eivät aiheuta ongelmia derivoinnissa (askelfunktion derivaattahan räjähtää askelhetkellä). Lag-termin lisääminen pudottaa derivoivan termin vahvistusta korkeilla taajuuksilla, jolloin termi reagoi pehmeämmin (etenkin korkeataajuisiin) häiriöihin.

3. Olet suunnittelemassa säätäjää prosessille, josta sinulla on tilamalli käytettävissä. Päätät käyttää takaisinkytkettyä säätölakia. Referenssisuure saattaa olla nollasta poikkeava. Vastaa seuraaviin kysymyksiin käyttämättä yhtälöitä.

a. Selitä sanallisesti, miten saavutettavuuden ja tarkkailtavuuden käsitteet liittyvät tilasäätäjän suunnitteluun. (2p)

b. Selitä sanallisesti, milloin tarvitset ja milloin et tarvitse tilatarkkailijaa. (2p)

c. Selitä sanallisesti, miten otat suunnittelussa huomioon sen, että referenssisuure voi olla nollasta poikkeava. Voit ajatella, että se koostuu askelmaisista muutoksista. (2p)

Ratkaisut

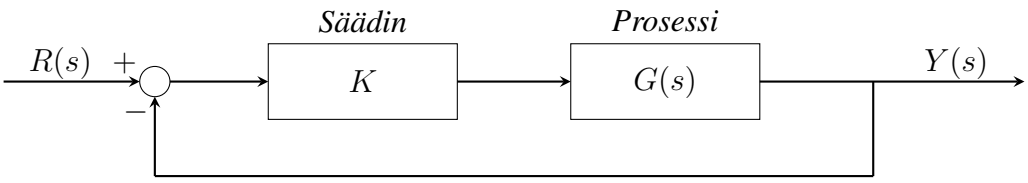
a. Jos systeemi on saavutettava, niin tilasäädetyn järjestelmän dynamiikka voidaan määrittää mielivaltaisesti (suljetun järjestelmän navat voidaan asetetella mielivaltaisesti). Toisaalta, vaikka systeemi ei olisikaan saavutettava, niin on edelleen mahdollista suunnitella stabiloiva tilasäädin, jos suljetun järjestelmän navat on mahdollista sijoittaa vasempaan puolitasoon, eli jos ei-ohjattavat tilat ovat asymptoottisesti stabiileja.

Tarkkailtavuus on analoginen käsite saavutettavuuden kanssa, mutta liittyy tilatarkkailijan suunnitteluun. Eli jos systeemi on tarkkailtava, niin silloin estimointivirheen dynamiikka voidaan määrittää mielivaltaisesti (vastaavan systeemin navat voidaan sijoitella mielivaltaisesti). Toisaalta, vaikka systeemi ei olisikaan tarkkailtava, niin on edelleen mahdollista suunnitella tilatarkkailija, jos systeemin ei-tarkkailtavat tilat ovat asymptoottisesti stabiileja (eli osaa tiloista voidaan tarkkailla, ja loput menevät asympttootisesti nollaan).

b. Tilatakaisinkytkentä on tilan funktio. Jos tila on mitattavissa, se on säätölain käytettävissä ja tarkkailijaa ei tarvita. Jos tilaa ei tunneta (ei voida mitata), niin on käytettävä tilatarkkailijaa. Tällöin säätölaissa käytetään estimoitua tilaa todellisen tilan sijaan.

c. Etukompensaattorilla voidaan asetettaa säädetyn järjestelmän staattinen vahvistus (askelvasteelle) referenssistä lähtösuureeseen arvoon 1. Tällöin lähtösuure seuraa asymptoottisesti askelmuotoista refenssiä. Toinen vaihtoehto on lisätä säätäjään integraattori, joka poistaa pysyvän poikkeaman, ja tällöinkin lähtösuure seuraa asymptoottisesti askemuotoista referenssiä.

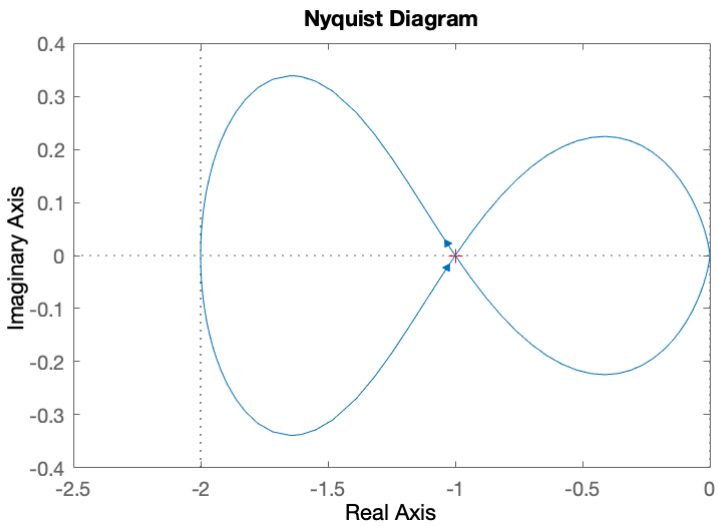
4. Tarkastellaan säätöjärjestelmää, jota kuvaa oheinen lohkokaavio



jossa prosessia kuvaa siirtofunktio $G(s) = \dfrac{2}{s^3 + 2s^2 + 2s - 4}$. Avoimen järjestelmän siirtofunktion (luupinsiirtofunktion) Nyquistin diagrammi on esitetty alla, kun $K = 4$.

a. Arvioi Nyquistin stabiilisuuslauseen avulla, millä parametrin K arvoilla suljettu järjestelmä on stabiili. Perustele vastauksesi. (3p)

b. Verifioi a-kohdan vastauksesi Routhin kaavion avulla. (3p)



Ratkaisut

a. Avoimen järjestelmän siirtofunktio (luupinsiirtofunktio) on

$$G(s)K = \frac{2K}{s^3 + 2s^2 + 2s - 4}.$$

Selvitetään aluksi Routhin kaavion avulla, montako napaa sillä on oikeassa puolitasossa:

$$\begin{array}{c|cc}
s^3 & 1 & 2 \\
s^2 & 2 & -4 \\
s^1 & -\frac{1}{2}\left|\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -4 \end{smallmatrix}\right| = 4 & 0 \\
s^0 & -\frac{1}{4}\left|\begin{smallmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 0 \end{smallmatrix}\right| = -4 & 0
\end{array}$$

Ensimmäisessä sarakkeessa on yksi merkinvaihto, joten avoimella järjestelmällä on yksi napa oikeassa puolitasossa. Nyquistin diagrammin pitää siis kiertää piste $(-1,0)$ kertaalleen vastapäivään, jotta suljettu järjestelmä olisi stabiili. Kuvassa Nyquistin diagrammi kiertää pisteen $(-1,0)$ vastapäivään, mutta näyttää myös leikkaavan sen, joten suljetun järjestelmän voidaan arvioida olevan (marginaalisesti) stabiili, kun $K=4$. Tämän lisäksi huomataan, että silmukka, joka kiertää pisteen $(-1,0)$, leikkaa reaaliakselin myös pisteessä $(-2,0)$. Näiden leikkauskohtien pitää olla pisteen $(-1,0)$ eri puolilla (tai kohdalla), jotta silmukka kiertää pisteen $(-1,0)$ vastapäivään. Kun parametrin K arvoa pienennetään, diagrammin jokainen piste siirtyy lähemmäksi origoa, joten kriittinen parametrin K arvo saavutetaan, kun diagrammin vasen leikkauskohta reaaliakselin kanssa on pisteessä $(-1,0)$. Koska leikkauspiste on $(-2,0)$, kun $K=4$, leikkauspiste on $(-1,0)$, kun $K=\frac{4}{2}=2$. Täten voidaan arvioida, että suljettu järjestelmä on stabiili, kun $2\leq K\leq 4$.

b. Selvitetään Routhin kaavion avulla, millä parametrin K arvoilla suljetulla järjestelmällä ei ole napoja vasemmassa puolitasossa. Suljetun järjestelmän siirtofunktio on

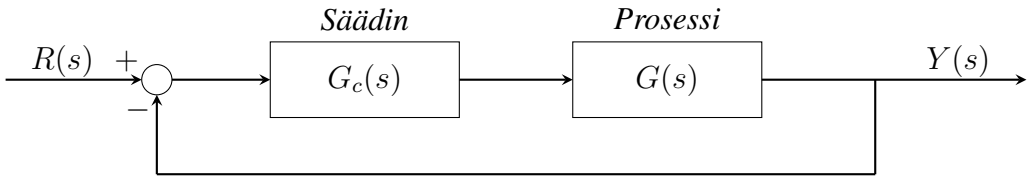
$$G_{tot}=\frac{G(s)K}{1+G(s)K}=\frac{\frac{2}{s^3+2s^2+2s-4}K}{1+\frac{2}{s^3+2s^2+2s-2}K}=\frac{2K}{s^3+2s^2+2s-4+2K},$$

jolle saadaan Routhin kaavio:

$$\begin{array}{c|cc}
s^3 & 1 & 2\\
s^2 & 2 & 2K-4\\
s^1 & -\frac{1}{2}\left|\begin{smallmatrix}1 & 2\\ 2 & 2K-4\end{smallmatrix}\right|=4-K & 0\\
s^0 & -\frac{1}{4-K}\left|\begin{smallmatrix}2 & 2K-4\\ 4-K & 0\end{smallmatrix}\right|=2K-4 & 0
\end{array}$$

Kaavion ensimmäiseen sarakkeeseen ei tule merkinvaihtoja, kun $4-K\geq 0$ ja $2K-4\geq 0$, eli kun $K\leq 4$ ja $K\geq 2$, eli suljettu järjestelmän on stabiili parametrin K arvoilla $2\leq K\leq 4$, aivan kuten a-kohdassa arvioitiin.

5. Tarkastellaan säätöjärjestelmää, jota kuvaa oheinen lohkokaavio



jossa säädin on muotoa $G_c(s)=K\left(1+\frac{1}{Ts}\right)$ ja prosessia kuvaa siirtofunktio $G(s)=\frac{1}{s+2}$. Viritä säätimen parametrit K ja T siten, että lähtösuure seuraa askelmaista referenssiä asymptoottisesti, prosentuaalinen ylitys askelvasteelle on korkeintaan 10%, ja suljetun järjestelmän ominaistaajuus on 5 rad/s. Suljetun järjestelmän siirtofunktioon mahdollisesti syntyvistä nollista ei tarvitse välittää tässä yhteydessä. (6p)

Ratkaisu. Lavennetaan säädin muotoon $G_c(s)=K\frac{Ts+1}{Ts}$ ja lasketaan suljetun järjestelmän

siirtofunktio:

$$G_{tot}(s) = \frac{G(s)G_c(s)}{1+G(s)G_c(s)} = \frac{K\frac{Ts+1}{Ts(s+2)}}{1+K\frac{Ts+1}{Ts(s+2)}} = \frac{K(Ts+1)}{Ts(s+2)+K(Ts+1)}$$
$$= \frac{K(Ts+1)}{Ts^2+T(K+2)s+K} = \frac{\frac{K}{T}(Ts+1)}{s^2+(K+2)s+\frac{K}{T}}.$$

Kyseessä on toisen kertaluvun dynamiikka, jonka nimittäjä voidaan kirjoittaa muodossa $s^2+2\zeta\omega_n+\omega_n^2$, jossa ζ on vaimennussuhde ja ω_n on ominaistaajuus. Vertaamalla tätä suljetun järjestelmän siirtofunktion nimittäjään saadaan yhtälöt

$$\begin{cases} 2\zeta\omega_n = K+2 \\ \frac{K}{T} = \omega_n^2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad K = 2\zeta\omega_n - 2 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{K}{\omega_n^2} = \frac{2\zeta\omega_n - 2}{\omega_n^2},$$

joista saadaan ratkaistua K ja T. Ensin pitää kuitenkin selvittää sopiva arvo vaimennussuhteelle, jotta prosentuaalinen ylitys on korkeintaan 10%. Prosentuaalinen ylitys vaimennussuhteen funktiona on esitettynä kuvaajana kaavakokoelmassa, jonka perusteella voidaan todeta, että prosentuaalinen ylitys on korkeintaa 10%, kun vaimennussuhde on vähintään $\zeta \approx 0.6$. Prosentuaalisen ylityksen kaavasta saataisiin tarkempikin arvio

$$\zeta^2 \geq \frac{\ln(10)}{\pi^2+\ln(10)^2},$$

eli vähintään $\zeta \approx 0.5912$, mutta $\zeta \approx 0.6$ on tässä yhteydessä riittävän hyvä likiarvo (kun kerran suljetun järjestelmän nollaakaan ei huomioida). Sijoittamalla $\zeta = 0.6$ ja $\omega_n = 5$ yllä oleviin kaavoihin saadaan parametreille K ja T arvot

$$K = 2\zeta\omega_n - 2 = 2\cdot 0.6\cdot 5 - 2 = 4, \qquad T = \frac{K}{\omega_n^2} = \frac{4}{5^2} = \frac{4}{25} = 0.16.$$

Koska vaimennetun toisen kertaluvun systeemin navat ovat vasemmassa puolitasossa, suljettu järjestelmä on asymptoottisesti stabiili näillä parametrien K ja T arvoilla. Lisäksi suljetun järjestelmän staattinen vahvistus on

$$\lim_{s\to 0} G_{tot}(s) = \lim_{s\to 0} \frac{\frac{K}{T}(Ts+1)}{s^2+(K+2)s+\frac{K}{T}} = \frac{\frac{K}{T}}{\frac{K}{T}} = 1,$$

eli lähtösuure seuraa askelmaista referenssiä asymptoottisesti (kyseessä on PI-säädin, joten näin käy kaikilla parametrien K ja T arvoilla, joilla suljettu järjestelmä on asympttootisesti stabiili). Annetut kriteerit toteutuvat siis parametrien arvoilla $K = 4$ ja $T = 0.16$ (kun jätetään suljetun järjestelmän nolla huomioimatta; todellisuudessa tällä virityksellä prosentuaalinen ylitys on noin 15%).