Institutionen för matematik
Aalto-universitet. Högskolan för teknikvetenskaper Pitkäranta

Mat-1.1010 Grundkurs L1

Sommartentamen 05.08.2013

Fyll i tydligt *på varje svarpapper* samtliga uppgifter. På *förhörskod och -namn* skriv kursens kod, namn samt *slutförhör* eller *mellanförhör* med ordningsnummer. Utbildningsprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Räknare är inte tillåten. Examenstid 4h.

1. Visa följande påstående rörande talföljder: Om $a_n \to a$, $b_n \to a$ och $a_n \le c_n \le b_n$ för varje n, så $c_n \to a$.

2. En spegelyta ges av planet T, som går genom punkterna $A = (1,1,-1)$, $B = (2,0,1)$ och $C = (-1,2,-4)$. Bestäm a) T:s ekvation på standardformen $ax + by + cz + d = 0$, b) spegelpunkten till punkten $P = (5,5,5)$ med avseende på planet T.

3. Fixpunktsiterationen
$$x_{n+1} = \frac{x_n^3 + 6x_n}{3x_n^2 + 2}, \quad n = 0, 1, \ldots$$
konvergerar till ett positivt reellt tal c. Bestäm c samt konvergensens asymptotiska ordning.

4. Ekvationen $x + \cos x = y + e^y$ bestämmer implicit funktionen $y(x)$. Bestäm Taylorpolynomet $T_2(x, 0)$ för denna funktion.

5. a) Visa att $1 + x \le e^x \le 1 + x + (e-2)\,x^2 \quad \forall x \in [0,1]$.
b) Antag olikheterna i a)-ledet. Visa: Om $a \ge 1$ och $n \in \mathbb{N}$, $n \ge \ln a$, så
$$1 + \frac{\ln a}{n} \le \sqrt[n]{a} \le 1 + \frac{\ln a}{n} + (e-2)\left(\frac{\ln a}{n}\right)^2.$$
Obs! Du kan börja från b)-ledet om du vill.