Till TF:s tentamens- arkiv. Hälsn. Georg

Aalto-yliopisto
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

Hyvönen/Kinnunen

Mat-1.1040 Matematiikan peruskurssi L4

Loppukoe 12.8.2013

1. (a) Laske funktion $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$

$$f(t) = \begin{cases} -1, & -\pi < t < 0, \\ 1, & 0 \le t \le \pi, \end{cases}$$

Fourierin kertoimet $\widehat{f}(j)$, $j \in \mathbb{Z}$.

(b) Selosta lyhyesti, miten Fourierin sarja liittyy tason yksikkökiekon Dirichletin ongelman

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, & \text{kun} \quad x \in \mathbb{R}^2,\ |x| < 1, \\ u(x) = f(x), & \text{kun} \quad x \in \mathbb{R}^2,\ |x| = 1, \end{cases}$$

ratkaisemiseen.

2. (a) Miten määritellään Fourierin muunnos ja Fourierin käänteismuunnos?

(b) Oletetaan, että f, g, $\widehat{f}$, $\widehat{g} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Näytä, että

$$\widehat{fg}(\xi) = (2\pi)^{-n}(\widehat{f} * \widehat{g})(\xi)$$

kaikilla $\xi \in \mathbb{R}^n$.

3. Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja rajoitettu joukko ja $T > 0$. Merkitään

$$\Omega_T = \Omega \times (0, T) \quad \text{ja} \quad \Gamma_T = (\Omega \times \{t = 0\}) \cup (\partial\Omega \times [0, T]).$$

Oletetaan, että $u \in C^2(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega_T})$ on ongelman

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u(x) = 0, & \text{kun} \quad x \in \Omega_T, \\ u(x) = g(x), & \text{kun} \quad x \in \Gamma_T, \end{cases}$$

ratkaisu joukossa Ω_T, missä $g \in C(\Gamma_T)$.

(a) Muotoile maksimiperiaate ratkaisulle u joukossa Ω_T. Pelkkä täsmällinen muotoilu riittää, maksimiperiaatetta ei tarvitse todistaa.

(b) Olkoon $f \in C(\Omega_T)$. Todista maksimiperiaatteen avulla, että ongelmalla

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u(x) = f(x), & \text{kun} \quad x \in \Omega_T, \\ u(x) = g(x), & \text{kun} \quad x \in \Gamma_T, \end{cases}$$

on korkeintaan yksi ratkaisu $u \in C^2(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega_T})$.

4. Muodosta reuna-arvo-ongelmalle

$$\begin{cases} -u''(x) + 3u(x) = 1, & x \in (0, 1), \\ -u'(0) + u(0) = 0, \quad u'(1) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

variaatioformulaatio. Mikä on tässä tapauksessa testifunktioavaruus V?

Hae variaatioformulaation avulla tehtävän (1) ratkaisulle Galerkin-approksimaatio aliavaruudesta

$$V_h = \operatorname{span}\{1, x\} \subset V.$$

(Riittää, että muodostat Galerkin-approksimaatiota vastaavan matriisiyhtälön, mutta sinun ei tarvitse ratkaista sitä.)

5. Kun lämpöyhtälön alku- ja reuna-arvo-ongelma

$$\begin{cases} u_t(x,t) = u_{xx}(x,t), & (x,t) \in (0,1) \times [0,\infty), \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t \in [0,\infty), \\ u(x,0) = f(x), & x \in (0,1), \end{cases}$$

paikkadiskretoidaan, päädytään tavallisen differentiaaliyhtälösysteemin alkuarvo-ongelmaan

$$(u^h)'(t) = \Delta^h_{D-D}\, u^h(t), \qquad u^h(0) = f^h, \tag{2}$$

kaikilla $t \geq 0$. Tässä $f^h = [f(x_1), \ldots, f(x_m)]^{\mathrm{T}}$ ja $u^h(t) \approx [u(x_1,t), \ldots, u(x_m,t)]^{\mathrm{T}}$, missä $x_j = jh$ ja $h = 1/(m+1)$ on hilavakio.

(a) Millainen on differenssimatriisi $\Delta^h_{D-D} \in \mathbb{R}^{m \times m}$? (Riittää, että muistat tai järkeilet rakenteen — todistaa ei tarvitse, mutta toki saa.)

(b) Esitä jokin (järjellinen) numeerinen menetelmä paikkadiskretoidun ongelman (2) ratkaisemiseksi. Valitse aika-askeleeksi $\delta > 0$ ja merkitse vektorilla u^h_k aikahila-arvon $u^h(k\delta)$ approksimaatiota, missä $k = 0, 1, 2, \ldots$.

(c) Millä aika-askeleen $\delta > 0$ arvoilla menetelmäsi on (varmasti) stabiili, eli pätee

$$\lim_{k \to \infty} u^h_k = 0 \in \mathbb{R}^m \ ?$$

Perustele vastauksesi.

Vihje 1: Matriisin $\Delta^h_{D-D} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ominaisarvot toteuttavat ehdon $0 > \lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_{m-1} > \lambda_m > -4/h^2$.

Vihje 2: Mille tahansa matriisille $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ pätee

$$\lim_{k \to \infty} B^k = 0 \in \mathbb{R}^{m \times m},$$

jos ja vain jos B:n ominaisarvot $\mu_1, \ldots, \mu_m$ toteuttavat $|\mu_j| < 1$, $j = 1, \ldots, m$.

6. Määritellään alkuarvo-ongelmalle

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(0) = x_0, \tag{3}$$

numeerinen ratkaisumenetelmä

$$x_{j+1} = x_j + h\big(11 f(t_j, x_j) - 10 f(t_{j+1}, x_j + h f(t_j, x_j))\big), \qquad j = 0, 1, \ldots,$$

missä $t_j = jh$ ja $h > 0$. (Voit olettaa, että $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.)

(a) Osoita, että kyseessä on (vähintään) ensimmäisen kertaluvun menetelmä. Toisin sanoen todista, että (3):n tarkka ratkaisu $x(t)$ toteuttaa

$$x(\tau + h) = x(\tau) + h\Big(11 f\big(\tau, x(\tau)\big) - 10 f\big(\tau + h, x(\tau) + h f(\tau, x(\tau))\big)\Big) + O(h^2)$$

olettaen, että f on riittävän sileä pisteen $\tau \geq 0$ ympäristössä. Miksi menetelmän sanotaan olevan *ensimmäistä* kertalukua, vaikka virhetermin $O(h^2)$ eksponentti on *kaksi*?

(b) Sovella menetelmää tilanteeseen $f(t,x) = \lambda x$, missä $\mathbb{R} \ni \lambda < 0$. Millä askelpituuden $h > 0$ arvoilla pätee, että

$$\lim_{j \to \infty} x_j = 0 \ ?$$

Kannattaako tätä menetelmää käyttää kankeiden tehtävien ratkaisemiseen?