

## Mat-1.1132 Matematiikan peruskurssi C3-II (5op)

Tentti 15.05.2013

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Tutkinto-ohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KTA, KON, MAR, MTE, PUU, RRT, TFM, TIK, TLT, TUO, YYT.

Kokeessa saa käyttää laskinta. Koeaika on neljä tuntia.

1. Laske (käsin, välivaiheet näkyviin) matriisin  $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -8 & 1 \end{bmatrix}$  ominaisarvot ja -vektorit. (6p)
2. Määrittele seuraavat käsitteet: a) ominaisarvon algebrallinen ja geometrinen kertaluku (4p), b) matriisiekspONENTTI (2p).
3. Olkoon  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ .
  - a) Laske  $e^A$ . (4p)
  - b) Määritä yleinen ratkaisu differentiaaliyhtälöryhmälle  $\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)$ . (2p)
4. a) Määritä matriisin  $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  singulaariarvohajotelma. (4p)
  - b) Perustele laskuin tai geometrisin tulkinnoin miksi  $|\det A|$  on matriisin  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  singulaariarvojen tulo. (2p)
5. Tarkastellaan Markovin matriisia

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

- a) Piirrä matriisia vastaava painotettu tilaverkko. (2p)

Piirroksen tulee olla selkeä. Merkitse verkon solmut ja kaaret siten, ettei sekaantumisen vaaraa ole. Vinkki: käytä piirrokseseen ainakin puolikas sivu ja piirrä verkon kolmas solmu muiden solmujen keskelle.
- b) Miksi matriisia vastaava Markov-prosessi on säännöllinen? (2p)
- c) Laske kääntöpuolen MATLAB-koodin avulla kolmannen tilan tasapainotodennäköisyys ja kerro mitä vastaus tarkoittaa. (2p)

## MATLAB-koodia tehtävään 5

```
>> P
```

```
P =
```

```
    0    0.5000    0.5000    0    0
  0.3333    0    0.3333    0.3333    0
  0.2500    0.2500    0    0.2500    0.2500
    0    0.3333    0.3333    0    0.3333
    0    0    0.5000    0.5000    0
```

```
>> [V D]=eig(P')
```

```
V =
```

```
  0.3086    0.5460    0.2673    0.3401    0.4082
  0.4629    0.4493   -0.5345   -0.6199   -0.0000
  0.6172    0.0000    0.5345    0.0000   -0.8165
  0.4629   -0.4493   -0.5345    0.6199    0.0000
  0.3086   -0.5460    0.2673   -0.3401    0.4082
```

```
D =
```

```
  1.0000    0    0    0    0
    0    0.2743    0    0    0
    0    0   -0.1667    0    0
    0    0    0   -0.6076    0
    0    0    0    0   -0.5000
```

```
>> sum(V(:,1))
```

```
ans =
```

```
  2.1602
```