Mat-1.1320 Matematiikan peruskurssi K2

Heikkinen/Lindfors

Tentti 5.8.2013

Kokeessa saa käyttää laskinta.
Sivun kääntöpuolelta löytyy tarpeellisia kaavoja.

1. Etsi ja luokittele funktion $f(x,y) = x^3 + 3xy + \frac{1}{2}y^2$ kriittiset pisteet.

2. Määrää funktion $f(x,y) = (x-1)^2 + y^2$ pienin ja suurin arvo kiekossa $x^2 + y^2 \leq 4$.

3. Laske
$$\iint_D xy\,dA,$$
kun

   a) D on kolmio, jonka kärkipisteinä ovat $(0,0), (0,1)$ ja $(1,0)$.

   b) D on neljäsosakiekko $x^2 + y^2 \leq 4,\ x \leq 0,\ y \geq 0$.

4. Laske vektorikentän
$$\mathbf{F}(x,y,z) = x^2 z\,\mathbf{i} + 2z\cos y\,\mathbf{j} + z^2 \sin y\,\mathbf{k}$$
vuo läpi pallopinnan $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ulospäin.

5. Määrää differentiaaliyhtälön
$$y'' - 5y' + 6y = e^{4x}$$
ratkaisu, joka toteuttaa alkuehdot $y(0) = 0,\ y'(0) = 0$.
Vihje: yksittäisratkaisu löytyy yritteellä $y = ae^{4x}$.

Pallokoordinaattimuunnos

$$
\begin{aligned}
x &= \rho \sin\phi \cos\theta \\
y &= \rho \sin\phi \sin\theta \\
z &= \rho \cos\phi \\
dV &= \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi.
\end{aligned}
$$

Integrointikaavoja

$$\iiint_D \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS$$

$$\iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS = \int_C \mathbf{F} \cdot dr$$

$$\iint_D \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \, dA = \int_C \mathbf{F} \cdot dr$$