Mat-1.1331 Matematiikan peruskurssi KP3-I

Heikkinen/Perkkiö

Tentti 15.5.2013

Tentissä saa käyttää laskinta. Sivun kääntöpuolelta löytyy tarpeellisia kaavoja.

1. Laske

   a) $\frac{2-3i}{3+i}$

   b) $(1+i)^6$

   c) $\mathrm{Ln}(-e^2)$.

   Esitä vastauksesi muodossa $x+iy,\quad x, y \in \mathbb{R}$.

2. a) Osoita, että funktio $u(x,y) = x^3 - 3xy^2 + 2xy$ on harmoninen ja määrää sen harmoninen konjugaatti.

   b) Onko funktio $f(z) = f(x+iy) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + i(4x^3y - 4xy^3 + y)$ analyyttinen $\mathbb{C}$:ssä?

3. a) Määrää $f^{(6)}(0)$, kun

   $$f(z) = z^2 e^{\frac{1}{3}iz^2}.$$

   b) Määrää potenssisarjan

   $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(in)^2}{5^n} z^n$$

   suppenemissäde.

4. Olkoon f 2π-jaksollinen funktio, jolle

   $$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{kun } -\pi < x \leq 0 \\ 1, & \text{kun } 0 < x \leq \pi \end{cases}.$$

   Määrää f:n Fourier-sarja.

5. Ratkaise alkuarvotehtävä

   $$f'' + f' - 6f = 0, \qquad f(0) = 1, \qquad f'(0) = 2$$

   Laplace-muunnoksen avulla.

Kaavoja

- Cauchy–Riemann-yhtälöt:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

- Analyyttisen funktion f Taylorin sarja keskuksena z_0 on

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n.$$

- Geometrinen sarja:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

kun $|z| < 1$.

- Eksponenttifunktion sarjaesitys:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n.$$

- 2π-jaksollisen funktion f Fourier-sarja on

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right),$$

missä

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx$$

ja

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx.$$

- Funktion $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ Laplace-muunnos on

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st}\, dt.$$

- Laplace-muunnoksia

Funktio	Muunnos
$t^n,\ n \geq 0$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cosh(\omega t)$	$\frac{s}{s^2-\omega^2}$
$\sinh(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$

- Laplace-muunnoksen ominaisuuksia

Merkitään $F = \mathcal{L}\{f\}$, $G = \mathcal{L}\{g\}$ ja $u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$.

Funktio	Muunnos
$af + bg$	$aF + bG$
$f(at)$	$\frac{1}{a}F(\frac{s}{a})$
$f(t - t_0)u(t - t_0)$	$e^{-st_0}F(s)$
$e^{-at}f(t)$	$F(s + a)$
$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$
$f''(t)$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - \sum_{j=0}^{n-1} s^{n-j-1} f^{(j)}(0)$