

Tentti 15.5.2013

Täytä huolellisesti kaikki vaaditut tiedot jokaiseen vastauspaperiin.

Ei laskimia eikä taulukoita.

1. Olkoon

$$A = \begin{bmatrix} 16 & -4 & 8 \\ -4 & 26 & 3 \\ 8 & 3 & 41 \end{bmatrix}$$

- a) Selitä, miksi matriisi A on positiivisesti definiitti. Vihje: Gershgorin.
b) Määritä matriisin A Cholesky-hajotelma muodossa $A = LL^T$.

2. Osoita, että yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 4x + y = 3 \\ 5x - y = -3 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$$

on ylimäärätty (eli ristiriitainen) ja määritä sille PNS-ratkaisu normaaliyhtälöiden avulla. (PNS = pienin neliösumma)

3. Ratkaise differentiaaliyhtälöryhmään $y' = Ay$ liittyvä alkuarvotehtävä $y(0) = [5, -5]^T$, kun

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

4. a) Määritä differentiaaliyhtälöryhmän

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 - 6 \\ y_2' = 5y_1 - 3y_2 + 2 \end{cases}$$

tasapainotila (jossa siis $y_1' = y_2' = 0$).

b) Määritä tasapainotilan tyyppi ja stabiilisuus.

5. Ratkaise Laplace-muunnoksen avulla alkuarvotehtävä $y'' - 4y' + 4y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Kääntöpuolella Laplace-kaavoja!

Laplace-muunnoksiin liittyviä kaavoja

Määritelmä: Annettu $f(t)$, $F = \mathcal{L}f$, $F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt$. Merkitään $u(t)$ = Heavisiden askelfunktio ja $\delta(t)$ = Diracin delta-funktio. Pätee:

$$(\mathcal{L}f')(s) = sF(s) - f(0), \quad (\mathcal{L}f'')(s) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0),$$

$$(\mathcal{L}f^{(n)})(s) = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0),$$

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\}(s) = \frac{1}{s}F(s), \quad \mathcal{L}(f * g) = (\mathcal{L}f)(\mathcal{L}g),$$

missä $(f * g)(t) = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau) d\tau = (g * f)(t)$;

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}(s) = F(s - a), \quad \mathcal{L}\{u(t - a)f(t - a)\} = e^{-as}F(s).$$

Muunnoksia:

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t - a)$	e^{-as}
$u(t - a)$	e^{-as}/s
1	$1/s$
t^n	$n!/s^{n+1}$
e^{at}	$1/(s - a)$
$\sin \omega t$	$\omega/(s^2 + \omega^2)$
$\cos \omega t$	$s/(s^2 + \omega^2)$
$\sinh at$	$a/(s^2 - a^2)$
$\cosh at$	$s/(s^2 - a^2)$