Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu Alestalo
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

Mat-1.1332 Matematiikan peruskurssi KP3-II

Tentti 27.8.2013.

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä erillisiä taulukoita.

Valitse viisi (5) tehtävää!

1. a) Kirjoita yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_2 + 5x_3 = 1 \end{cases}$$

muodossa $A\overline{x} = \overline{b}$ ja laske kerroinmatriisin A Choleskyn LL^T-hajotelma.
b) Ratkaise yhtälöryhmä kahdessa vaiheessa a-kohdan hajotelman avulla.

2. Osoita, että yhtälöryhmän $x = 0,\ x = a,\ y = 0,\ y = b$ pienimmän neliösumman ratkaisu on sama kuin vastaavien suorien rajaaman suorakulmion keskipiste. Tässä $a, b \in \mathbf{R}$ ovat vakioita.

3. a) Määritä differentiaaliyhtälöryhmään

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2 \\ y_2' = 2y_1 - 2y_2 \end{cases}$$

liittyvän alkuarvotehtävän $y_1(0) = 1,\ y_2(0) = 3$ ratkaisu.
b) Mikä on tasapainotilan $(0, 0)$ tyyppi ja stabiilisuus?

4. Tarkastellaan epälineaarista differentiaaliyhtälöryhmää

$$\begin{cases} y_1' = 2y_2 - 2y_1y_2 \\ y_2' = y_1 - y_2. \end{cases}$$

a) Määritä systeemin tasapainotilat (eli kriittiset pisteet).
b) Laske Eulerin menetelmän mukainen yhden askeleen approksimaatio ratkaisun arvolle $\mathbf{y}(0.1)$, kun $\mathbf{y}(0) = [1, -2]^T$.

5. Muodosta seuraavien lausekkeiden Laplace-käänteismuunnokset:

$$\text{a)}\ \frac{s}{(s-2)(s+2)}, \quad \text{b)}\ \frac{s}{s^2 - 4s + 13}.$$

6. Ratkaise Laplace-muunnoksen avulla differentiaaliyhtälö

$$y' + 6y = u(t-4), \quad \text{kun} \quad y(0) = 0.$$

Tässä u on Heavisiden askelfunktio.

Kääntöpuolella Laplace-muunnokseen liittyviä kaavoja.

Laplace-muunnoksiin liittyviä kaavoja

Määritelmä: Annettu $f(t)$, muunnos

$$F(s) = \mathcal{L}f(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt.$$

Merkitään $u(t)$ = Heavisiden askelfunktio ja $\delta(t)$ = Diracin delta-funktio.
Pätee:

$$(\mathcal{L}f')(s) = sF(s) - f(0), \quad (\mathcal{L}f'')(s) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0),$$

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right\}(s) = \frac{1}{s}F(s).$$

$$\mathcal{L}(f * g) = (\mathcal{L}f)(\mathcal{L}g), \text{ missä } (f * g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau = (g * f)(t);$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}(s) = F(s-a), \quad \mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\}(s) = e^{-as}F(s).$$

Muunnoksia:

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t-a)$	e^{-as}
$u(t-a)$	e^{-as}/s
1	$1/s$
t^n	$n!/s^{n+1}$
e^{at}	$1/(s-a)$
$\sin \omega t$	$\omega/(s^2+\omega^2)$
$\cos \omega t$	$s/(s^2+\omega^2)$