

Mat-1.1410 Matematiikan peruskurssi P1 Aalto-yliopisto, Turunen
Tentti (15.5.2013 klo 9-13, ei laskimia eikä taulukoita!)

1. Etsi kaikki ne kompleksiluvut $z = a + bi \in \mathbb{C}$ (missä $a, b \in \mathbb{R}$), joilla

$$\operatorname{Re}(z - 1/z) = 0,$$

missä $\operatorname{Re}(w)$ on luvun $w \in \mathbb{C}$ reaaliosa.

2. Olkoon $[A] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, missä luvuille $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ pätee $ad \neq bc$.
Laske käänteismatriisi $[A]^{-1}$.

3. Olkoon $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ jatkuva kasvava funktio
(kasvavuus: $f(a) \leq f(b)$ aina, kun $0 \leq a \leq b \leq 1$).
Olkoon ℓ tämän funktion kuvaajan $y = f(x)$ kaarenpituus.

a) Miksi $\ell \geq \sqrt{1 + (f(1) - f(0))^2}$?

b) Miksi $\ell \leq 1 + |f(1) - f(0)|$?

Piirrä myös kuvat, jotka havainnollistavat näitä epäyhtälöitä!

4. Piirrä havainnollinen kuva, jonka avulla perustelet miksi

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt,$$

missä funktio $f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on jatkuva.

(Tässä on siis kysymys Analyysin peruslauseesta.)

Vihje: Kulje käyrää $y = f(t)$ pitkin pisteestä $(a, f(a))$ pisteeseen $(x, f(x))$ hyppien vaaka-akselin suunnassa n askelta pituudeltaan $h = (x - a)/n$.
Nyt $f'(t) \approx [f(t + h) - f(t)]/h$, ja integraali on suurin piirtein summa, jossa n summattavaa...

5. a) Olkoon $0 < t < \varepsilon < 1$. Perustelet, miksi $\int_t^\varepsilon \frac{t}{x} dx \leq \varepsilon$ ja $\int_\varepsilon^1 \frac{t}{x} dx \leq \frac{t}{\varepsilon}$.
b) Perustelet a-kohdan kaavojen avulla raja-arvo $\lim_{t \rightarrow 0^+} t \ln(t) = 0$.

Vihje: huomaa, että $\ln(t) = \int_1^t \frac{1}{x} dx$.