Aalto-yliopisto

BTT 2 / Kevät 2013

Tentti to 30.5. klo 13:00 – 17:00

Kokeessa saa käyttää laskinta. Laskujen välivaiheet on kirjoitettava käsin näkyviin. Taulukkokirjoja ei sallita; kaavoja löytyy paperin kääntöpuolelta. Kukin tehtävä on kuuden pisteen arvoinen. Tehtävät eivät välttämättä ole vaikeusjärjestyksessä.

Tehtävä 1: Esitä lineaarikuvauksen $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $L(x, y) = (x_1 - x_2, 2x_1 + 4x_2)$ matriisi standardikannassa ja vektorien $\mathbf{v}_1 = (1, -1)$, $\mathbf{v}_2 = (1, -2)$ määräämässä kannassa.

Tehtävä 2: Laske matriisin $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ ominaisarvot ja -vektorit. Piirrä kuva, jossa matriisi on tulkittu lineaarikuvaukseksi ja josta ominaisarvojen ja -vektorien geometrinen merkitys käy ilmi.

Tehtävä 3: Laske matriisin $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -4 & -2 \end{pmatrix}$ determinantti. Mikä on yleisesti ottaen determinantin geometrinen merkitys, kun matriisi tulkitaan lineaarikuvaukseksi? Anna esimerkki ja piirrä kuva 2×2 -tilanteesta.

Tehtävä 4: Laske $\int x \cos(5x)\, dx$ ja $\int_0^{\pi} x^2 \sin(x)\, dx$.

Tehtävä 5: Laske vektorikentän $\mathbf{F}(x, y) = (xy,\ 2x - y)$ polkuintegraali origosta pisteeseen $(1, 1)$ pitkin paraabelia $y = x^2$.

Tehtävä 6: Olkoon B avaruuden $\mathbb{R}^3$ yksikköpallo,

$$B = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\right\},$$

ja olkoon $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{F}(x, y, z) = (3x, 3y, 3z)$. Laske sekä vuointegraalina että divergenssilauseen avulla

$$\iint_{\partial B} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS,$$

missä normaali osoittaa pallokuoresta ∂B ulospäin.

Kaavoja:

- Muuttujanvaihto tasointegraalissa:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_U f\big(G(u,v)\big)\,J_G(u,v)\,dudv.$$

- Napakoordinaateissa $(x,y) = G(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ pätee $J_G(r,\theta) = r$.
- Sylinterikoordinaateissa $(x,y,z) = G(r,\theta,z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$ pätee $J_G(r,\theta,z) = r$.
- Pallokoordinaateissa $(x,y,z) = G(\rho,\theta,\varphi) = (\rho\cos\theta\sin\varphi,\ \rho\sin\theta\sin\varphi,\ \rho\cos\varphi)$ pätee $J_G(\rho,\theta,\varphi) = \rho^2\sin\varphi$.