

**A!**

Aalto-yliopisto

**BTT 2 / Kevät 2013****Tentti ke 28.8. klo 13:00 – 17:00**

Kokeessa saa käyttää laskinta. Laskujen välivaiheet on kirjoitettava käsin näkyviin. Taulukkokirjoja ei sallita; kaavoja löytyy paperin kääntöpuolelta. Kukin tehtävä on kuuden pisteen arvoinen. Tehtävät eivät välttämättä ole vaikeusjärjestyksessä.

**Tehtävä 1:** Olkoon  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ .

- Määritä matriisin  $A$  ominaisarvot ja -vektorit. (2p)
- Diagonalisoi matriisi  $A$  ja tarkista, että tulos on oikein. (2p)
- Tulkitse matriisi  $A$  lineaarikuvaukseksi  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , piirrä kuva ja kerro lyhyesti suomen kielellä mitä ominaisarvot ja -vektorit kuvassa tarkoittavat. (2p)

**Tehtävä 2:** Laske matriisin  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -4 & -2 \end{pmatrix}$  determinantti. Mikä on yleisesti ottaen determinantin geometrinen merkitys, kun matriisi tulkitaan lineaarikuvaukseksi? Anna esimerkki ja piirrä kuva  $2 \times 2$ -tilanteesta.

- Tehtävä 3:**
- Olkoon  $z_1 = 4 - 3i$  ja  $z_2 = 3 - 5i$ . Määritä  $z_1 z_2$ ,  $\text{Im}(z_1/z_2)$  ja  $\text{Arg } z_2$ . (3p)
  - Laske luvun 8 kompleksiset kuutiojuuret ja piirrä ne  $xy$ -koodinaatistoon. (3p)

**Tehtävä 4:** Tasointegraalin muuttujanvaihtokaava löytyy paperin kääntöpuolelta.

- Selitä kaavassa esiintyvät merkinnät  $D$ ,  $U$ ,  $G(u, v)$  ja  $J_G(u, v)$ . (3p)
- Laske esimerkkinä ellipsin  $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$  pinta-ala. Kerro mitä tässä ovat  $U$ ,  $G$  ja  $J_G$ . (3p)

**Tehtävä 5:** Laske vektorikentän  $F(x, y) = (xy, 2x - y)$  polkuintegraali origosta pisteeseen  $(1, 1)$  pitkin paraabelia  $y = x^2$ .

**Käännä!**

**Tehtävä 6:** Laske tilavuus avaruuden  $\mathbb{R}^3$  alueelle, jota rajoittavat tasot

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}, \quad \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 4 - y\}$$

ja sylinteri  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 4\}$ .

**Kaavoja:**

- Muuttujanvaihto tasointegraalissa:

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \iint_U f(G(u, v)) J_G(u, v) \, du dv.$$

- Napakoordinaateissa  $(x, y) = G(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$  pätee  $J_G(r, \theta) = r$ .
  - Sylinterikoordinaateissa  $(x, y, z) = G(r, \theta, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$  pätee  $J_G(r, \theta, z) = r$ .
  - Pallokoordinaateissa  $(x, y, z) = G(\rho, \theta, \varphi) = (\rho \cos \theta \sin \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \varphi)$  pätee  $J_G(\rho, \theta, \varphi) = \rho^2 \sin \varphi$ .
-