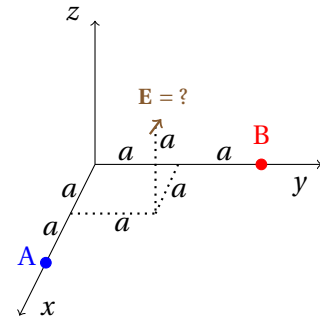


1. Pistevaraukset **A** ja **B** sijaitsevat kuvan mukaisesti x - ja y -akseleilla etäisyydellä $2a$ origosta.

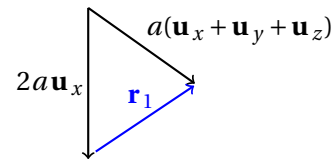
Mihin suuntaan osoittaa sähkökenttävektori **E** pisteessä $(x, y, z) = (a, a, a)$, kun varaukset ovat positiivisia ja varaus **A** on kaksi kertaa niin suuri kuin varaus **B**. Positiivisen varauksen synnyttämä sähkökenttä osoittaa pois päin varauksesta, on verrannollinen sen suuruuteen ja heikkenee suhteessa etäisyyden neliöön.

Esitä vastauksesi yksikkövektorina. Laske myös kulmat, jotka sähkökenttä muodostaa x -, y - ja z -akselien kanssa.



Tarkasteltavan kenttäpisteen etäisyysvektori varauksesta A on

$$\mathbf{r}_1 = a(\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y + \mathbf{u}_z) - 2a\mathbf{u}_x = a(-\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y + \mathbf{u}_z)$$



ja varauksesta B etäisyysvektori on $\mathbf{r}_2 = a(\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y + \mathbf{u}_z) - 2a\mathbf{u}_y = a(\mathbf{u}_x - \mathbf{u}_y + \mathbf{u}_z)$.

Koska nämä etäisyydet ovat yhtäsuuret, kenttien etäisyysvaikutukset ovat samat ja kentän suuntavektorit voidaan laskea yhteen suoraan painottamalla varausten suuruudella. Siksi kokonaiskentän suunta on

$$2\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 = a(-\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y + 3\mathbf{u}_z)$$

jonka yksikkövektori on

$$\mathbf{u} = \frac{2\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{|2\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2|} = \frac{2\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{\sqrt{(2\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) \cdot (2\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)}} = \frac{-\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y + 3\mathbf{u}_z}{\sqrt{11}}$$

Kentän kulmat akseleihin nähden ovat $\theta_x, \theta_y, \theta_z$:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_x = \cos\theta_x = -\frac{1}{\sqrt{11}}, \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_y = \cos\theta_y = \frac{1}{\sqrt{11}}, \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_z = \cos\theta_z = \frac{3}{\sqrt{11}}$$

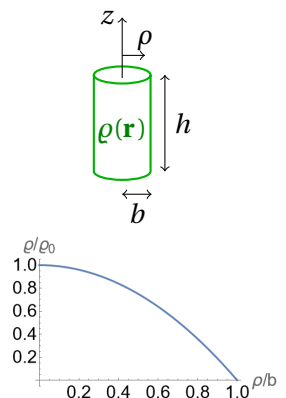
joten kulmat ovat $\theta_x \approx 108^\circ, \theta_y \approx 72^\circ, \theta_z \approx 25^\circ$. (Eli kenttä osoittaa enimmäkseen z -suuntaan, mutta sillä on myös y -suuntainen komponentti ja samansuuruinen komponentti negatiiviseen x -suuntaan.)

2. Katkaistun ympyräsylinterin muotoisen alueen sisällä on sähkövarausta. Varaustiheys ei ole tasainen, vaan se on tiheämpää akselin lähellä ja pienenee nollaan, kun tullaan sylinterin pinnalle, seuraavan funktion mukaisesti:

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho_0 \left(1 - \left(\frac{\rho}{b} \right)^2 \right) \quad (0 < \rho < b)$$

missä ρ_0 on vakio, laadultaan varaus tilavuutta kohti. (Ole tarkkana symboleissa, varaustiheys ρ on eri merkki kuin sylinterikoordinaatti ρ , joka mittaa pisteen etäisyyttä z -akselilta.)

Laske sylinterin sisältämä kokonaisvaraus Q . Laske sille myös lukuarvo, kun mitat ovat $b = 1 \text{ mm}$, $h = 3 \text{ mm}$ ja $\rho_0 = 1 \text{ C/m}^3$.

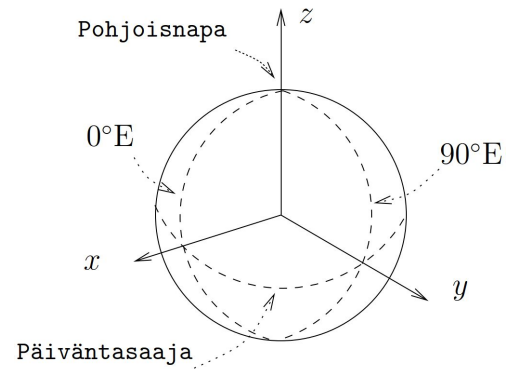


Kokonaisvaraus saadaan integroimalla varaustiheys sylinterin tilavuuden ylitse (huomaa, esimerkiksi kaa-vakokoelmasta, että sylinterikoordinaatistossa differentiaalinen tilavuusalkio on $dV = \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz$):

$$Q = \int_V \rho(\rho, \varphi, z) \, dV = \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^b \rho_0 \rho \left(1 - \left(\frac{\rho}{b} \right)^2 \right) d\rho = 2\pi h \rho_0 \frac{b^2}{4} = \frac{\pi b^2 h \rho_0}{2}$$

Lukuarvoksi saadaan $Q \approx 4,7 \text{ nC}$.

3. Otaniemen maantieteelliset koordinaatit ovat suunnilleen seuraavat: $60^{\circ}11'N$, $24^{\circ}50'E$. Oleta maapallon säteeksi 6370 km, sijoita sen keskipiste origoon ja pallokoordinaatisto oheisen kuvan mukaisesti, jossa x -akseli kulkee nollameridiaanin (Greenwichin pituuspiiri) kautta.

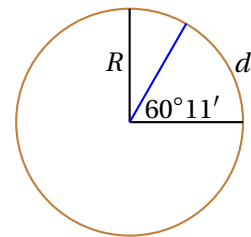


- (a) Kuinka pitkä on matka suoraan etelään Otaniemestä Päiväntasaajalle? (Siis maanpintaa pitkin, ei sen läpi!)
- (b) Singaporen pituuspiiri on $103^{\circ}50'E$. Se on melkein Päiväntasaajalla, ja oletetaan näin tässä tehtävässä. Montako kilometriä on Otaniemestä Singaporeen?

Vihje: Pohdi, miten saat annetuista koordinaateista pallokoordinaatiston kulmat θ ja φ .

- (a) Etäisyys meridiaania pitkin Päiväntasaajalle d on helppo laskea, se on kaarenpituus, joka on säteen ja kulman tulo (kulma on ilmoitettava radiaaneissa). Nyt säde on Maapallon säde $R = 6370$ km ja kulma ($60^{\circ}11'$) puolestaan 1,05 radiaania, joten matka on

$$d = 1.05 \cdot 6370 \text{ km} \approx 6690 \text{ km}$$



- (b) Singaporen matka on hiukan vaikeampi laskea, koska isoympyrä ei kulje pitkin leveys- tai pituuspiirejä. Lasketaan se etsimällä kulma, missä Otaniemi ja Singapore näkyvät origosta (maapallon keskipisteestä). Sitä varten tarvitaan pallokoordinaatiston kulmat molemmille paikoille, sillä yksikkövektori joka osoittaa origosta ko. suuntaan, on $\mathbf{u} = \mathbf{u}_x \sin \theta \cos \varphi + \mathbf{u}_y \sin \theta \sin \varphi + \mathbf{u}_z \cos \theta$. Koska Otaniemen pohjoinen leveysaste on $60^{\circ}11' = (60 + 11/60)^{\circ} \approx 60,183^{\circ}$, on kulma z -akseliin (pohjoisnapaan) nähden

$$\theta_O \approx 90^{\circ} - 60,183^{\circ} = 29,817^{\circ} \hat{=} 0,5204 \text{ (rad)}$$

Ja atsimuuttinen napakulma on suoraan pituusaste itäänpäin laskettuna:

$$\varphi_O = (24 + 50/60)^{\circ} \approx 24,833^{\circ} \hat{=} 0,4334 \text{ (rad)}$$

Vastaavasti Singaporen kulmat: koska oletetaan se Päiväntasaajalle, on $\theta_S = 90^{\circ} = \pi/2$ radiaania ja sen atsimuuttikulma $\varphi_S = 103,83^{\circ} = 1,81$ radiaania.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_O \cdot \mathbf{u}_S &= (\mathbf{u}_z \cos \theta_O + \mathbf{u}_x \sin \theta_O \cos \varphi_O + \mathbf{u}_y \sin \theta_O \sin \varphi_O) \cdot (\underbrace{\mathbf{u}_z \cos \theta_S}_{=0} + \underbrace{\mathbf{u}_x \sin \theta_S \cos \varphi_S}_{=1} + \underbrace{\mathbf{u}_y \sin \theta_S \sin \varphi_S}_{=1}) \\ &= \sin \theta_O \cos \varphi_O \cos \varphi_S + \sin \theta_O \sin \varphi_O \sin \varphi_S \\ &= \sin \theta_O (\cos \varphi_O \cos \varphi_S + \sin \varphi_O \sin \varphi_S) \\ &= \sin \theta_O \cos(\varphi_O - \varphi_S) \\ &= \sin 29,8^{\circ} \cos(24,8^{\circ} - 103,8^{\circ}) \\ &\approx 0,0949 \end{aligned}$$

Tämä lukema on siis kosini siitä kulmasta, jossa Otaniemi ja Singapore näkyvät origosta. Siksi etäisyys Otaniemestä Singaporeen on

$$\underbrace{\arccos(0,0949)}_{1,46 \text{ (rad)}} \cdot 6370 \text{ km} \approx 9400 \text{ km}$$

1. Karteesisen koordinaatiston yksikkövektorit $\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z$ ovat vakiovektoreita, joten ne ovat lähteettömiä (divergenssi = 0) ja pyörteettömiä (roottori = 0).

Mutta entä pallokoordinaatistossa? Yksikkövektorit $\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\theta, \mathbf{u}_\varphi$ ovat toki vakiopituisia (määritelmän mukaisesti pituus = 1), mutta vektorisuunta on paikan funktio (riippuu kulmista θ, φ). Tutki pallokoordinaatiston yksikkövektorien mahdollista lähteettömyyttä ja pyörteettömyyttä laskemalla kaikki asiaan liittyvät divergenssit ja roottorit:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u}_r, \quad \nabla \cdot \mathbf{u}_\theta, \quad \nabla \cdot \mathbf{u}_\varphi, \\ \nabla \times \mathbf{u}_r, \quad \nabla \times \mathbf{u}_\theta, \quad \nabla \times \mathbf{u}_\varphi. \end{aligned}$$

Tarkista että lopputulos vaikuttaa geometrisesti järkevältä.

Ratkaisu:

Pallokoordinaatistossa vektorikentän $\mathbf{f} = f_r \mathbf{u}_r + f_\theta \mathbf{u}_\theta + f_\varphi \mathbf{u}_\varphi$ divergenssi on (kaavakokoelman mukaan)

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 f_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (f_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} f_\varphi,$$

joten yksikkövektorien divergenssit ovat

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u}_r &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2) = \frac{2}{r}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u}_\theta &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta) = \frac{\cos \theta}{r \sin \theta} = \frac{\cot \theta}{r}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u}_\varphi &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} 1 = 0. \end{aligned}$$

Kaavakokoelman mukaan pallokoordinaatiston roottori on

$$\nabla \times \mathbf{f} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \mathbf{u}_r & \mathbf{u}_\theta r & \mathbf{u}_\varphi r \sin \theta \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ f_r & r f_\theta & (r \sin \theta) f_\varphi \end{vmatrix},$$

joten yksikkövektorien roottorit ovat

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{u}_r &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \mathbf{u}_r & \mathbf{u}_\theta r & \mathbf{u}_\varphi r \sin \theta \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{0}, \\ \nabla \times \mathbf{u}_\theta &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \mathbf{u}_r & \mathbf{u}_\theta r & \mathbf{u}_\varphi r \sin \theta \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ 0 & r & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{r} \mathbf{u}_\varphi, \\ \nabla \times \mathbf{u}_\varphi &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \mathbf{u}_r & \mathbf{u}_\theta r & \mathbf{u}_\varphi r \sin \theta \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ 0 & 0 & r \sin \theta \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\mathbf{u}_r \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta) - \mathbf{u}_\theta r \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \theta) \right] = \frac{\cot \theta}{r} \mathbf{u}_r - \frac{1}{r} \mathbf{u}_\theta. \end{aligned}$$

Yhteenvedon voimme todeta, että \mathbf{u}_r on pyörteetön ja \mathbf{u}_φ on lähteetön, mikä tuntuu järkevältä kun miettii miten \mathbf{u}_r osoittaa origosta pois päin muttei pyöri mihinkään suuntaa ja \mathbf{u}_φ :n kenttäviivat muodostaa suljettuja silmukoita z-akselin ympäri. (Koordinaattimuunnoksella tai alunperin laskemalla roottori sylinterikoordinaatistossa saadaan yksinkertaisempi lauseke $\nabla \times \mathbf{u}_\varphi = \frac{1}{\rho} \mathbf{u}_z$.)

Yksikkövektori \mathbf{u}_θ ei ole lähteetön eikä pyörteetön.

2. Laske vektorikentän

$$\mathbf{f} = x \mathbf{u}_x$$

vuon yksikköpallon läpi ulospäin. Laske siis integraali

$$\Phi_f = \oint_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, dS,$$

missä pinta S on pallo jonka säde on 1 ja keskipiste on origossa, ja \mathbf{n} on tämän pinnan ulospäin osoittava normaalivektori. Laske pintaintegraali käyttämättä Gaussin lausetta.

Ratkaisu:

Pallopinnan yli on helpointa integroida pallokoordinaatistossa, joten muutetaan annettu vektorikenttä \mathbf{f} pallokoordinaatistoon. Kaavakokoelman mukaan

$$x = r \sin \theta \cos \varphi,$$
$$\mathbf{u}_x = \mathbf{u}_r \sin \theta \cos \varphi + \mathbf{u}_\theta \cos \theta \cos \varphi - \mathbf{u}_\varphi \sin \varphi.$$

Yksikköpallon pinnalla $r = 1$ ja $\mathbf{n} = \mathbf{u}_r$, joten integrointipinnalla $\mathbf{f} \cdot \mathbf{n} = \sin^2 \theta \cos^2 \varphi$. Pinta-alkio on kaavakokoelman mukaan $dS = r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi$ missä edelleen $r = 1$, joten integraaliksi tulee

$$\Phi_f = \int_0^\pi \sin^3 \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \, d\varphi.$$

Ensimmäinen integraali:

$$\int_0^\pi \sin^3 \theta \, d\theta = \int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta \, d\theta = \int_0^\pi \left(-\cos \theta + \frac{1}{3} \cos^3 \theta \right) = \frac{4}{3}$$

Toinen integraali:

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \, d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [1 + \cos(2\varphi)] \, d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[\varphi + \frac{1}{2} \sin(2\varphi) \right] = \pi$$

Lopputulokset:

$$\Phi_f = \oint_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, dS = \frac{4\pi}{3}$$

Tätä voisi (tehtävänannon vastaisesti) laskea paljon helpommin Gaussin lauseen avulla:

$$\Phi_f = \oint_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{f} \, dV = \int_V 1 \, dV = \text{yksikköpallon tilavuus} = \frac{4\pi}{3}.$$

3. Staattisen $+z$ -suuntaisen pistemäisen sähködipolin potentiaali on

$$\phi = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Olkoon dipolimomentti p valittu siten, että $p/(4\pi\epsilon_0) = 1.0 \text{Vm}^2$.

- Laske sähkökenttä $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ pallokoordinaatistossa.
- Esitä sähkökenttä karteesisessa koordinaatista xz -tasossa, eli $\mathbf{E}(x, z)$ kun $y = 0$.
- Visualisoi sähkökenttä xz -tasossa. Kenttäkuva voi muodostua erillisistä nuolista tai yhtenäisistä kenttäviivoista. Kentän amplitudia voi visualisoida värillä, nuolien pituuksilla tai kenttäviivojen tiheydellä. Apuna voit käyttää Matlab, Mathematica, WolframAlpha jne, tai vaihtoehtoisesti voit laskea kentän riittävän monessa pisteessä ja sen avulla käsin hahmottaa miten kenttä käyttäytyy dipolin ympäristössä. (Käsin piirtäessä kannattaa miettiä mitä symmetrioita voi hyödyntää.)

Ratkaisu:

- Sähkökenttä pallokoordinaatistossa:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi = -\mathbf{u}_r \frac{\partial}{\partial r}\phi - \mathbf{u}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}\phi - \mathbf{u}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}\phi = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{2 \cos \theta}{r^3} \mathbf{u}_r + \frac{\sin \theta}{r^3} \mathbf{u}_\theta \right] = E_r \mathbf{u}_r + E_\theta \mathbf{u}_\theta$$

- Kaavakokoelman avulla saadaan vektorikentän muunnoksella komponentit

$$\begin{aligned} E_x &= E_r \sin \theta \cos \varphi + E_\theta \cos \theta \cos \varphi, \\ E_y &= E_r \sin \theta \sin \varphi + E_\theta \cos \theta \sin \varphi, \\ E_z &= E_r \cos \theta - E_\theta \sin \theta. \end{aligned}$$

Tarkastelupiste on xz -tasossa ja valitaan aluksi $x > 0$ jolloin $\varphi = 0$, $\sin \varphi = 0$ ja $\cos \varphi = 1$. Saadaan siis

$$\begin{aligned} E_x &= E_r \sin \theta + E_\theta \cos \theta = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3 \sin \theta \cos \theta}{r^3}, \\ E_y &= 0, \\ E_z &= E_r \cos \theta - E_\theta \sin \theta = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{2 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{r^3}. \end{aligned}$$

Nyt pitää vielä muuntaa r , $\sin \theta$ ja $\cos \theta$ karteesiseen koordinaatistoon. Kun $\varphi = 0$, kaavakokoelman yleinen koordinaattimuunnos yksinkertaistuu hieman

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi = r \sin \theta & \Rightarrow \sin \theta &= \frac{x}{r} \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi = 0 \\ z &= r \cos \theta & \Rightarrow \cos \theta &= \frac{z}{r} \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + z^2} \end{aligned}$$

lopputulos voidaan esittää muodossa

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3xz}{(x^2 + z^2)^{5/2}}, \\ E_y &= 0, \\ E_z &= \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{2z^2 - x^2}{(x^2 + z^2)^{5/2}}. \end{aligned}$$

Entä jos $x < 0$? Silloin $\cos \varphi = -1$ ja $x = -r \sin \theta$, mutta lopputulos ei muutu kun miinusmerkit kumoavat toisensa sopivasti.

(c) Kuvan piirtäminen onnistuu esim. seuraavalla Mathematica-koodilla

$$E_x = (3 x z)/(x^2 + z^2)^{(5/2)};$$

$$E_z = (-x^2 + 2 z^2)/(x^2 + z^2)^{(5/2)};$$

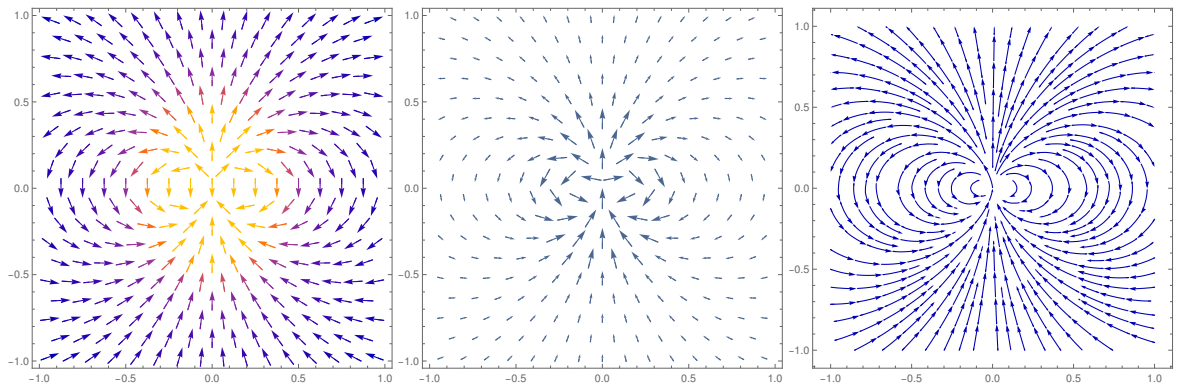
```
VectorPlot[{Ex, Ez}, {x, -1, 1}, {z, -1, 1}]
```

```
VectorPlot[{Ex, Ez}, {x, -1, 1}, {z, -1, 1}, VectorScaling -> "Linear",
```

```
VectorColorFunction -> None, VectorPoints -> 15]
```

```
StreamPlot[{Ex, Ez}, {x, -1, 1}, {z, -1, 1}]
```

joka tuottaa seuraavat kuvat



Ensimmäisessä kuvassa nuolet osoittavat kentän suunnan ja väri kentän amplitudin. Toisessa kuvassa nuolien pituudet pitäisi olla suoraan verrannolliset kentän amplitudiin. Kolmannessa kuvassa on yhtenäiset kenttäviivat, mutta Mathematica katkaisee viivat kun ne ovat liian tiheissä. (Oikeasti yhtenäiset kenttäviivat kulkevat kaikki dipolin läpi.)

Näissä kuvissa vektorisuunta tulee hyvin esille, mutta kentän amplitudin $1/r^3$ -käyttäytyminen ei näy kovin selkeästi.

1. Tutkitaan tässä tehtävässä Gaussin lausetta. Tarkastele vektorifunktiota

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \mathbf{r} = r \mathbf{u}_r$$

joka siis kasvaa verrannollisena etäisyyteen origosta ja osoittaa siitä pois päin.

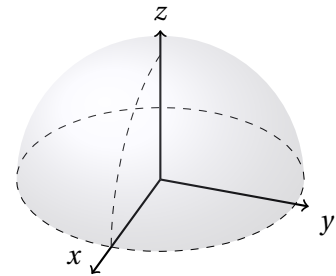
- (a) Laske $\nabla \cdot \mathbf{f}$, eli tämän funktion divergenssi kaikkialla avaruudessa.
 (b) Tarkastele b -säteistä puolipalloa, joka on origokeskinen ja sijaitsee z -akselin positiivisella puolella (siis alueessa $r \leq b, 0 \leq \theta \leq \pi/2$).

Laske tämän funktion vuo kyseisen puolipallon pinnan lävitse. Laske siis integraali

$$\Psi = \oint_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, dS,$$

missä S on tarkasteltavan puolipallon suljettu pinta ja \mathbf{n} on pinnalla oleva, ulospäin osoittava yksikkönormaalivektori.

- (c) Toteuttavatko laskelmasi Gaussin lauseen? Toisin sanoen onko divergenssin integraali puolipallon tilavuuden ylitse yhtä suuri kuin edellisen kohdan vuo?



(a) Pallokoordinaatistossa saadaan, kun vektorifunktiolla $\mathbf{f} = \mathbf{r} = f_r \mathbf{u}_r$ on vain r -komponentti:

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 f_r) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \cdot r) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^3) = 3$$

eli divergenssi on vakio kaikkialla.

Toki lasku menee kätevästi myös muissakin koordinaatistoissa, esim. karteesisissa, jossa $\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \mathbf{r} = \mathbf{f}(x, y, z) = x\mathbf{u}_x + y\mathbf{u}_y + z\mathbf{u}_z$, jolloin

$$\nabla \cdot \mathbf{f}(x, y, z) = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$$

(b) Lasketaan vuo kahdessa osassa: kaarevan kattopinnan ja pohjan summana $\Psi_k + \Psi_p$. Kaarevalla pinnalla ulkonormaali on säteen suuntainen, joten $\mathbf{n} = \mathbf{u}_r$, ja funktio on $\mathbf{f} = b\mathbf{u}_r$

$$\Psi_k = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \underbrace{\mathbf{f} \cdot \mathbf{u}_r}_b \underbrace{r^2}_{b^2} \sin \theta \, d\theta \, d\varphi = 2\pi b^3 \int_0^{\pi/2} \sin \theta \, d\theta = 2\pi b^3 \left[-\cos \theta \right]_0^{\pi/2} = 2\pi b^3$$

Lattialla pinnan ulkonormaali on kaikkialla suoraan alaspäin, eli $\mathbf{n} = -\mathbf{u}_z$. Mutta koska xy -tasolla on z -komponentti nolla, on $\mathbf{f} = x\mathbf{u}_x + y\mathbf{u}_y$ eikä sillä ole z -komponenttia. Silloin Ψ_p :n vuointegraalin sisällä pistetulo $\mathbf{f} \cdot \mathbf{n} = 0$ koska ne ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan ja vuoksi lattian läpi saadaan nolla. Lopputulos on $\Psi = \Psi_k = 2\pi b^3$.

(c) Divergenssin tilavuusintegraali on helppo, koska divergenssi on vakio ($\nabla \cdot \mathbf{f} = 3$), joten tulokseksi tulee kolme kertaa puolipallon tilavuus:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{f} \, dV = 3V = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi b^3}{3} = 2\pi b^3$$

mikä on sama kuin vuolaskun tulos.

2. Todista (laskemalla nabraoperaatiot), että nollakaavat toteutuvat seuraavissa tapauksissa:

- (a) Laske ∇g ja edelleen $\nabla \times (\nabla g)$, kun g -funktio on $g = \rho^3 \cos(2\varphi)$.
 (b) Laske $\nabla \times \mathbf{h}$ ja edelleen $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{h})$, kun \mathbf{h} -funktio on $\mathbf{h} = \mathbf{u}_z + \mathbf{u}_\theta$.

(a) Gradientti sylinterikoordinaatistossa on (nyt g -funktio riippuu vain ρ :sta ja φ :stä):

$$\nabla g = \mathbf{u}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^3 \cos(2\varphi)) + \mathbf{u}_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\rho^3 \cos(2\varphi)) = \mathbf{u}_\rho 3\rho^2 \cos(2\varphi) - \mathbf{u}_\varphi 2\rho^2 \sin(2\varphi)$$

Tämän roottori:

$$\nabla \times \nabla g = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \mathbf{u}_\rho & \rho \mathbf{u}_\varphi & \mathbf{u}_z \\ \partial/\partial \rho & \partial/\partial \varphi & \partial/\partial z \\ 3\rho^2 \cos(2\varphi) & \rho \cdot (-2\rho^2 \sin(2\varphi)) & 0 \end{vmatrix} = \frac{\mathbf{u}_z}{\rho} (-6\rho^2 \sin(2\varphi) - (-2 \cdot 3\rho^2 \sin(2\varphi))) = \mathbf{0}$$

Gradientin roottorin pitäisikin olla nolla kaikille skalaarifunktiolle.

(b) Tässä kannattaa huomata, että \mathbf{h} :n ensimmäinen termi on vakiovektori \mathbf{u}_z , joten sen roottori katoaa. Toinen termi on \mathbf{u}_θ , jonka roottori laskettiin toisella harjoituskierroksella:

$$\nabla \times \mathbf{h} = \nabla \times (\mathbf{u}_z + \mathbf{u}_\theta) = \underbrace{\nabla \times \mathbf{u}_z}_{=0} + \nabla \times \mathbf{u}_\theta = \nabla \times \mathbf{u}_\theta = \frac{1}{r} \mathbf{u}_\varphi$$

(nabla (derivointi) on lineaarinen operaatio: summan derivaatta on derivaattojen summa).

Tästä roottorista divergenssi on (roottorifunktiolla on jäljellä vain φ -komponentti, joten divergenssissä on vain yksi termi)

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{r} \mathbf{u}_\varphi \right) = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{r} \right) = 0$$

Siis roottorin divergenssi katoaa, kuten pitäisikin.

Toki voi myös laskea kaiken heti alusta pallokoordinaatistossa, eli ottaa mukaan \mathbf{h} -vektorin ensimmäisen termin, siis vakioyksikkövektorin \mathbf{u}_z .

Sehän on

$$\mathbf{u}_z = \mathbf{u}_r \cos \theta - \mathbf{u}_\theta \sin \theta$$

Silloin roottori $\nabla \times \mathbf{u}_z$ on pallokoordinaatistossa:

$$\nabla \times (\mathbf{u}_r \cos \theta - \mathbf{u}_\theta \sin \theta) = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \mathbf{u}_r & r \mathbf{u}_\theta & r \sin \theta \mathbf{u}_\varphi \\ \partial/\partial r & \partial/\partial \theta & \partial/\partial \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{u}_\varphi \frac{r \sin \theta}{r^2 \sin \theta} [-\sin \theta - (-\sin \theta)] = 0$$

Eli tosiaankin, \mathbf{u}_z :n roottori katoaa.

3. Kuten toisella tehtäväkierroksella opittiin, on origossa sijaitsevan sähköstaattisen dipolin (jonka dipolimomentti osoittaa z -akselin suuntaan) potentiaali ϕ_d verrannollinen pallokoordinaatistossa esitettyyn funktioon

$$\frac{\cos \theta}{r^2}$$

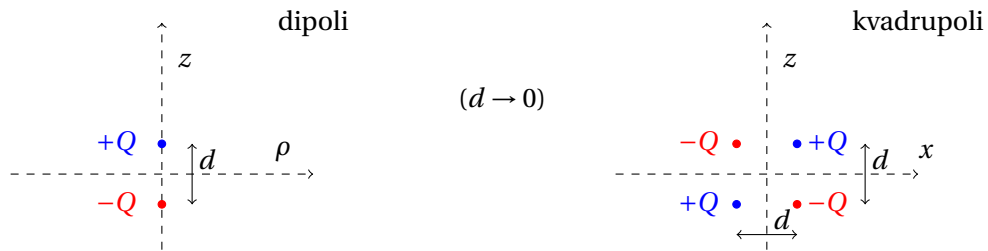
- (a) Osoita, että dipolin potentiaali toteuttaa origon ulkopuolella ($r \neq 0$) Laplacen yhtälön $\nabla^2 \phi_d = 0$.
 (b) Kvadrupolin potentiaali ϕ_{kv} on verrannollinen funktioon

$$\frac{\sin \theta \cos \theta \cos \varphi}{r^3}$$

Laske tämän funktion gradientti ja edelleen gradientista divergenssi. Toteuttaako kvadrupolin potentiaali Laplacen yhtälön?

(c) **Bonustehtävä, ei pakollinen, mutta lisäpisteitä hyvästä ratkaisusta luvassa:**

Visualisoi sähkökenttä $\mathbf{E}_{kv} = -\nabla\phi_{kv}$ kvadrupolin tasossa (siis xz -tasossa, jossa $\varphi = 0$ ja $\varphi = \pi$).



(a) Suoraviivainen lasku pallokoordinaatistossa:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \left(\frac{\cos\theta}{r^2} \right) &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\cos\theta}{r^2} \right) \right] + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\cos\theta}{r^2} \right) \right] + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left(\frac{\cos\theta}{r^2} \right)}_{=0} \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{2\cos\theta}{r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(-\frac{\sin^2\theta}{r^2} \right) \\ &= \frac{1}{r^2} \left(\frac{2\cos\theta}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2 \sin\theta} \left(\frac{2\sin\theta \cos\theta}{r^2} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

(b) Funktion gradientti on

$$\begin{aligned} \nabla \left(\frac{\sin\theta \cos\theta \cos\varphi}{r^3} \right) &= \mathbf{u}_r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\sin\theta \cos\theta \cos\varphi}{r^3} \right) + \mathbf{u}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\sin\theta \cos\theta \cos\varphi}{r^3} \right) + \mathbf{u}_\varphi \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\sin\theta \cos\theta \cos\varphi}{r^3} \right) \\ &= \mathbf{u}_r \left(\frac{-3\sin\theta \cos\theta \cos\varphi}{r^4} \right) + \mathbf{u}_\theta \left(\frac{\cos(2\theta) \cos\varphi}{r^4} \right) + \mathbf{u}_\varphi \left(\frac{-\cos\theta \sin\varphi}{r^4} \right) \end{aligned}$$

ja tästä divergenssi:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \nabla \left(\frac{\sin\theta \cos\theta \cos\varphi}{r^3} \right) &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \left(\frac{-3\sin\theta \cos\theta \cos\varphi}{r^4} \right) \right] + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin\theta \left(\frac{\cos(2\theta) \cos\varphi}{r^4} \right) \right] + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{-\cos\theta \sin\varphi}{r^4} \right) \\ &= \underbrace{6r^{-5} \sin\theta \cos\theta \cos\varphi}_{6r^{-5} \sin\theta \cos\theta \cos\varphi} + \underbrace{r^{-5} \cos\varphi (\cot\theta - 6\sin\theta \cos\theta)}_{r^{-5} \cos\varphi (\cot\theta - 6\sin\theta \cos\theta)} + \underbrace{-r^{-5} \cot\theta \cos\varphi}_{-r^{-5} \cot\theta \cos\varphi} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Keskimmäisen termin laskemisessa kannattaa hyödyntää trigonometrisiä kaavoja kuten $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ ja $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$, jolloin voi huomata, että

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin\theta \underbrace{(\cos^2\theta - \sin^2\theta)}_{\cos(2\theta)} \right] = \cos^3\theta - 2\cos\theta \sin^2\theta - 3\sin^2\theta \cos\theta = \cos\theta \underbrace{(\cos^2\theta - 5\sin^2\theta)}_{1-6\sin^2\theta}$$

Koska Laplacen operaattori on gradientin divergenssi, niin kvadrupolin potentiaali toteuttaa Laplacen yhtälön (paitsi itse kvadrupolipisteessä $r = 0$, jossa potentiaali on erittäin singulaarinen).

(c) Kvadrupolin sähkökenttä on potentiaalın negatiivinen gradientti, joten se saadaan edellä lasketusta tuloksesta:

$$\mathbf{E}_{kv} = -\nabla\phi_{kv} \sim \mathbf{u}_r \left(\frac{3\sin\theta \cos\theta \cos\varphi}{r^4} \right) - \mathbf{u}_\theta \left(\frac{\cos(2\theta) \cos\varphi}{r^4} \right) + \mathbf{u}_\varphi \left(\frac{\cos\theta \sin\varphi}{r^4} \right)$$

Tämä lauseke on xz -tasossa positiivisilla x :n arvoilla ($\varphi = 0$)

$$\mathbf{u}_r \left(\frac{3 \sin \theta \cos \theta}{r^4} \right) - \mathbf{u}_\theta \left(\frac{\cos(2\theta)}{r^4} \right)$$

ja sama vektori negatiivisena, jos $x < 0$, eli $\varphi = \pi$. Tästä muodosta näkee, että kenttä on radiaalinen (osoittaa pois päin kvadrupolista diagonaalisuunnissa: $\theta = 45^\circ$ ja 135°)

Jos tässä vaihtaa yksikkövektorit xz -tasoon, tulee vektorisuunnaksi

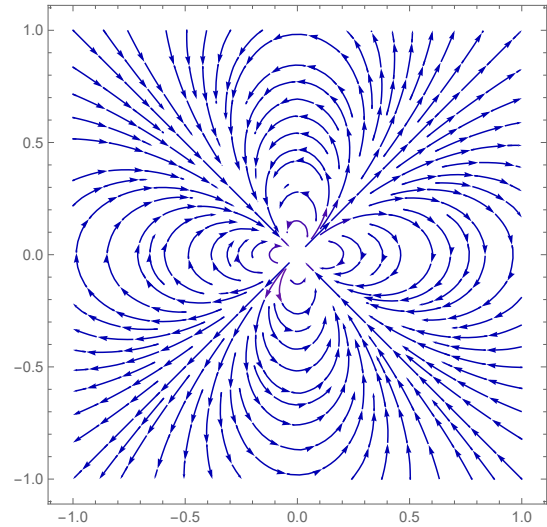
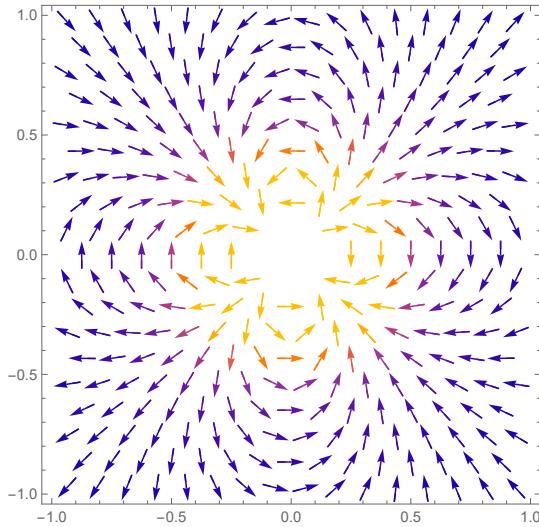
$$\mathbf{u}_x \left(\frac{(5 \sin^2 \theta - 1) \cos \theta}{r^4} \right) + \mathbf{u}_z \left(\frac{(5 \cos^2 \theta - 1) \sin \theta}{r^4} \right)$$

joka on havainnollinen, koska siitä näkee, että kenttä on horisontaalinen (sillä ei ole z -komponenttia), kun $\sin \theta = 0$ (siis $\pm z$ -akselin suunnassa) ja kun $5 \cos^2 \theta = 1$ eli $\theta \approx 63^\circ$ tai 117° . Ja myös huomataan, että kenttä on vertikaalinen (vain z -komponentti) silloin, kun $\theta = 90^\circ$ ($\pm x$ -akselin suunnassa) ja kun $5 \sin^2 \theta = 1$ eli $\theta \approx 27^\circ$ tai 153° .

Kannattaa panna merkille erittäin jyrkkä kentänvoimakkuuden kasvu kvadrupolin läheisyydessä: r^{-4} , käänteisen etäisyyden neljäs potenssi! Dipolillahan se on r^{-3} .

Kenttävektorifunktio karteesisissa koordinaatistossa on

$$\mathbf{u}_x \frac{z(z^2 - 4x^2)}{(x^2 + z^2)^{7/2}} + \mathbf{u}_z \frac{x(4z^2 - x^2)}{(x^2 + z^2)^{7/2}}$$



Ratkaisuohjeita ja kommentteja 4. laskuharjoitukseen

1. Staattinen sähkökenttä ja potentiaali

- a. Kirjoitetaan $\mathbf{E} = E_x \mathbf{u}_x + E_y \mathbf{u}_y + E_z \mathbf{u}_z$. Kaavakokoelman tai oppikirjan Staattiset kentät kaavalla (2.57) tai (2.58) saadaan laskettua, että

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{u}_z \left[\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right] = 0$$

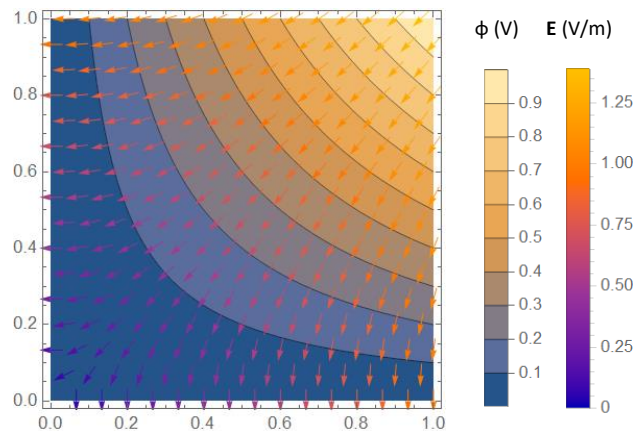
Roottori on nolla, joten tällöin sähkökenttä on pyörteetön (= konservatiivinen = energian säilyttävä), joten se voi olla staattinen sähkökenttä.

b. Yrite muotoa

$$\phi(x, y) = Axy + B,$$

jossa B on vakio (yksikkö V), toteuttaa Laplacen yhtälön $\nabla^2 \phi = \nabla \cdot (\nabla \phi) = 0$. Tämä on helppo osoittaa laskemalla Laplacen operaattori kaavakokoelman tai oppikirjan mukaan (2.67). Vakiota B käytetään siten, että sen avulla voimme kiinnittää tietyn pisteen tai vakiopotentiaalipinnan haluttuun referenssipotentiaaliin. Usein se valitaan siten, että potentiaali on äärettömyydessä nolla, mutta tässä tehtävässä sellainen valinta ei olisi kovin mielekäs.

Viereinen kuva havainnollistaa sekä sähkökentän \mathbf{E} että sen potentiaalin $\phi = Axy + B$. Potentiaalin tapauksessa on piirretty ns. tasapotentiaalipintoja eli käyriä, joissa potentiaali on vakio. Molempien piirtämisessä on käytetty $A = 1 \text{ V/m}^2$ ja potentiaalin piirtämisessä vakiotermiä $B = 0 \text{ V}$ eli koordinaattiakselit on kiinnitetty referenssipotentiaaliin nolla eli ne on "maadoitettu".



Kuvasta huomataan, että sähkökenttävektori on kohtisuorassa tasapotentiaalipintaa vasten. Tämä johtuu siitä, että sähkökenttä potentiaalin negatiivisena gradienttina osoittaa aina suuntaan, jonne potentiaali pienenee nopeimmin. Myös kentän voimakkuuden suuruus on verrannollinen potentiaalin muutosnopeuteen paikan suhteen.

- c. Työn laskeminen vektorifunktion viivaintegraalista voi olla hyvinkin työlästä, joten sitä kannattaa nyt välttää. Tarkoituksena onkin hyödyntää edellisen kohdan potentiaalifunktiota ϕ ja gradienttilausta (2.70) seuraavasti:

$$W = \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b (-Q\mathbf{E}) \cdot d\mathbf{l} = Q \int_a^b \nabla\phi \cdot d\mathbf{l} = Q[\phi(1 \text{ m}, 1 \text{ m}) - \phi(0 \text{ m}, 0 \text{ m})] \\ = QA \cdot 1 \text{ m} \cdot 1 \text{ m}$$

$$W\text{:n yksikkö on } [W] = C \cdot \frac{V}{m^2} \cdot 1 \text{ m}^2 = J$$

- d. $Q, A > 0$, joten edellisen kohdan lopputuloksesta nähdään, että $W > 0$. Työtä tehdään kentän aiheuttamaa voimaa (siis kenttää) vastaan. Tehty työ varastoituu sähkövarauksen sähköiseksi potentiaalienergiaksi.
- e. Jos varaus päästettäisiin vapaaksi pisteestä $b = (1,1)$ kenttä \mathbf{E} kiihdyttäisi varauksen liikkeeseen voiman $\mathbf{F} = Q\mathbf{E}$ avulla. Varaus kulkisi kenttäviivojen suunnassa kohti pienempää potentiaalia ja potentiaalienergia muuttuisi varauksen liike-energiaksi tai materiaalin vastuksen aiheuttamaksi lämmöksi.

2. Tehtävässä tarkastellaan sähködipolia, jota käsitellään oppikirjan luvussa 3.3.3.

- a. $\mathbf{p} = p\mathbf{u}_z$, joten pistetulo $\mathbf{r} \cdot \mathbf{p} = r\mathbf{u}_r \cdot p\mathbf{u}_z = rp \cos \theta$

Edellisessä \mathbf{u}_z lauseke pallokoordinaatistossa on katsottu kaavakokoelmasta.

Potentiaalin lausekkeeksi tulee

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon r^2}$$

eli täsmälleen sama kuin 2. laskuharjoituksen 3. tehtävässä.

- b. Tässä $\mathbf{p} = p\mathbf{u}_x$, joten pistetulo $\mathbf{r} \cdot \mathbf{p} = r\mathbf{u}_r \cdot p\mathbf{u}_x = rp \sin \theta \cos \varphi$ ja potentiaali voidaan kirjoittaa

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{p \sin \theta \cos \varphi}{4\pi\epsilon r^2}$$

Sähkökenttä lasketaan $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r})$. Pallokoordinaatiston gradientti löytyy joko kaavakokoelmasta tai oppikirjan kaava (2.38).

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r}) = -\mathbf{u}_r \frac{\partial\phi}{\partial r} - \mathbf{u}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} - \mathbf{u}_\varphi \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial\phi}{\partial\varphi} = \frac{p}{4\pi\epsilon r^3} (\mathbf{u}_r 2 \sin\theta \cos\varphi - \mathbf{u}_\theta \cos\theta \cos\varphi + \mathbf{u}_\varphi \sin\varphi)$$

- c. **Tämä kohta on ylimääräinen ja siitä voi saada lisäpisteitä.** Aluksi sovelletaan osamäärän derivoimissääntöä ja sen jälkeen tehtävä on suoraviivaista laskemista.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \left(\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}}{4\pi\epsilon r^3} \right) = -\frac{1}{4\pi\epsilon} \nabla \left(\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}}{r^3} \right)$$

$$\begin{aligned}
\nabla\left(\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}}{r^3}\right) &= \frac{\nabla(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}) r^3 - \nabla(r^3) \mathbf{r} \cdot \mathbf{p}}{r^6} = \frac{\nabla(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})}{r^3} - \frac{3r^2 \nabla r (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})}{r^6} \\
&= \frac{\nabla[(x\mathbf{u}_x + y\mathbf{u}_y + z\mathbf{u}_z) \cdot (p_x\mathbf{u}_x + p_y\mathbf{u}_y + p_z\mathbf{u}_z)]}{r^3} - \frac{3r^2 \nabla r (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})}{r^6} \\
&= \frac{\nabla[p_x x + p_y y + p_z z]}{r^3} - \frac{3\mathbf{u}_r (r\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{p})}{r^4} = \frac{\overbrace{p_x\mathbf{u}_x + p_y\mathbf{u}_y + p_z\mathbf{u}_z}^{\mathbf{p}}}{r^3} - \frac{3\mathbf{u}_r (\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{p})}{r^3} \\
&= \frac{1}{r^3} [\mathbf{p} - 3\mathbf{u}_r (\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{p})]
\end{aligned}$$

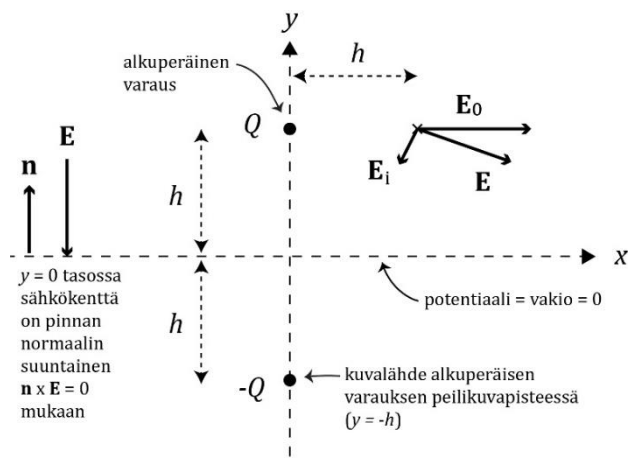
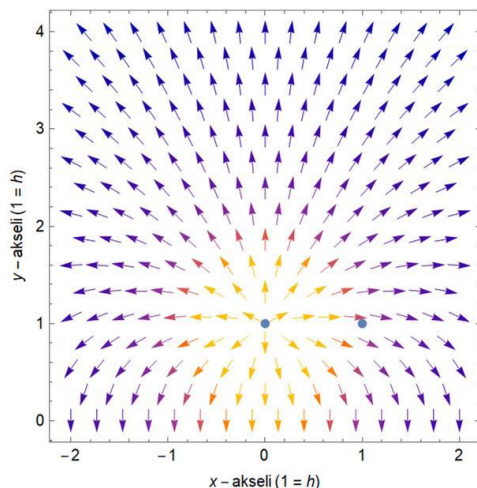
Testataan lopuksi kaavan toimivuutta tehtävän b-kohtaan. $\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{p} = p \sin \theta \cos \varphi$, joten

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\mathbf{r}) &= -\frac{1}{4\pi\epsilon r^3} [p\mathbf{u}_x - 3p \sin \theta \cos \varphi \mathbf{u}_r] \\
&= -\frac{p}{4\pi\epsilon r^3} \left[\overbrace{\sin \theta \cos \varphi \mathbf{u}_r + \cos \theta \cos \varphi \mathbf{u}_\theta - \sin \varphi \mathbf{u}_\varphi}^{\mathbf{u}_x} - 3 \sin \theta \cos \varphi \mathbf{u}_r \right] \\
&= \frac{p}{4\pi\epsilon r^3} [2\sin \theta \cos \varphi \mathbf{u}_r - \cos \theta \cos \varphi \mathbf{u}_\theta + \sin \varphi \mathbf{u}_\varphi]
\end{aligned}$$

Tuli siis sama lauseke kuin tehtävän b-kohdassa.

3. Alla vasemmalla oleva kuva on piirretty Mathematicalla. Sähkökentän kenttäviivat alkavat positiivisesta varauksesta ja kulkevat siitä pois päin. Lisäksi huomataan, että sähkökenttä on johdepinnalla ($y = 0$) pinnan normaalin $+\mathbf{u}_y$ kanssa yhdensuuntainen vektori, koska $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0$. Keltainen väri merkitsee suurempaa kentänvoimakkuutta ja sininen pienempää. Kenttien laskeminen ja kuvan piirtäminen perustuvat oppikirjan lukuun 4.6.

Alhaalla oikealla on periaatteellinen kuva tilanteesta, jossa johtava taso on korvattu peilikuvapisteesen lisätyllä kuvälähteellä, jonka varaus on $-Q$. Kuvälähdeperiaate (method of images) on esitelty oppikirjan kappaleessa 4.6. \mathbf{E}_0 on siis alkuperäisen varauksen aiheuttama kenttä ja \mathbf{E}_i on kuvälähteen aiheuttama kenttä. Kokonaiskenttää merkitään \mathbf{E} , joka on \mathbf{E}_0 :n ja \mathbf{E}_i :n vektorisumma. (Mieti, miksi voimme summata kentät yhteen.)



Kuvalähteen aiheuttama kenttä \mathbf{E}_i voidaan laskea hyödyntäen "origon siirtoa", joka on esitetty oppikirjan kappaleessa 3.3.1.

$$\mathbf{E}_i = \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 D^2} \mathbf{u}_D = \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 (\sqrt{5}h)^2} \frac{\overbrace{(h\mathbf{u}_x + h\mathbf{u}_y)}^{\text{vektori origosta}} - \overbrace{(-h\mathbf{u}_y)}^{\text{vektori origosta}}}{\underbrace{\sqrt{5}h}_{\text{pisteen } x=h, y=h \text{ ja kuvalähteen välinen etäisyys}}} = \frac{-Q}{20\sqrt{5}\pi\epsilon_0 h^2} (\mathbf{u}_x + 2\mathbf{u}_y)$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_i = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 h^2} \mathbf{u}_x + \frac{-Q}{20\sqrt{5}\pi\epsilon_0 h^2} (\mathbf{u}_x + 2\mathbf{u}_y) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 h^2} \left[\overbrace{\left(1 - \frac{1}{5\sqrt{5}}\right)}^{0.9106} \mathbf{u}_x - \overbrace{\frac{2}{5\sqrt{5}} \mathbf{u}_y}^{0.1789} \right]$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{=|\mathbf{E}_0|}$ $\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{itseisarvo} = 0.9280}$

Vastaus vaikuttaa järkevältä, koska \mathbf{E} :n suunta vastaa hyvin yllä esitettyjen kuvien mukaista suuntaa "loivasti alaviistoon oikealle".

Eli $|\mathbf{E}| = 0.9280|\mathbf{E}_0|$, joten johdetason ansiosta kenttä on 7,2 % pienempi kuin mitä se olisi ilman johdetasoa.

1. Kompassin neula näyttää (magneettiseen) pohjoiseen maapallon staattisen magneettikentän takia, mutta muut paikalliset magneettikentät voivat harhauttaa kompassia näyttämään ”väärin”. Lasketaan tässä tehtävässä yksi arvio miten helposti tämä onnistuu tasavirralla.

Kun kompassia pidetään vaakatasossa, se reagoi magneettikentän horisontaalikomponenttiin, joka Helsingissä on noin $15\ \mu\text{T}$. Oletetaan, että pitkässä suorassa johtimessa kulkee tasavirta $5,0\ \text{A}$. Kuinka lähelle tämä johdin pitää tuoda, jotta kompassi kääntyy näyttämään suoraan (magneettiseen) etelään? Missä asennossa johtimen pitää olla kompassiin nähden?

Ratkaisu:

Pitkän suoran virtalangan magneettivuontiheys \mathbf{B} on sylinterikoordinaatistossa

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \mathbf{u}_\varphi,$$

kun virta I on z -akselilla ja kulkee positiiviseen z -suuntaan. Kentän suunta (\mathbf{u}_φ) on oikean käden sormien mukainen, kun peukalo osoittaa virran suuntaan.

Virtalangan magneettikenttä pitää olla voimakkaampi kuin maan magneettikentän horisontaalikomponentti $B_{\text{maa}} = 15\ \mu\text{T}$, joten

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} > B_{\text{maa}} \quad \Rightarrow \quad \rho < \frac{\mu_0 I}{2\pi B_{\text{maa}}} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \cdot 5\ \text{A}}{2\pi \cdot 15 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}} \approx 67\ \text{mm}.$$

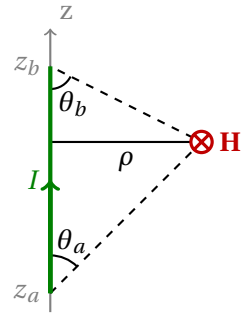
Virta pitää kompassin kohdalla synnyttää riittävän voimakkaan etelään osoittavan magneettikentän. Etäisyys kompassista on alle 67 mm ja asento voi esimerkiksi olla jokin seuraavista:

- Virtajohdin on kompassin itäpuolella ja virta kulkee ylöspäin.
- Virtajohdin on kompassin länsipuolella ja virta kulkee alaspäin.
- Virtajohdin on kompassin yläpuolella ja virta kulkee länteen.
- Virtajohdin on kompassin alapuolella ja virta kulkee itään.

2. Johda Biot–Savartin lain avulla seuraava lauseke suoran virtalangan magneettikentälle

$$\mathbf{H} = \mathbf{u}_\varphi \frac{I}{4\pi\rho} (\cos\theta_a + \cos\theta_b),$$

missä kohtisuora etäisyys virtalangasta ρ ja kentän suunta \mathbf{u}_φ voidaan esittää sylinterikoordinaatistossa kun virtalanka on z -akselilla ja virta kulkee positiiviseen z -suuntaan.



Vinkki: Esitä tarvittava etäisyys ρ :n ja sopivan kulman θ avulla. Tee tämän jälkeen muuttujanvaihdos jolla integraali $\int_{z_a}^{z_b} \dots dz$ saadaan muotoon $\int_{\theta_a}^{\pi-\theta_b} \dots d\theta$.

Ratkaisu:

Oppikirjan merkinnöillä Biot–Savartin laki on

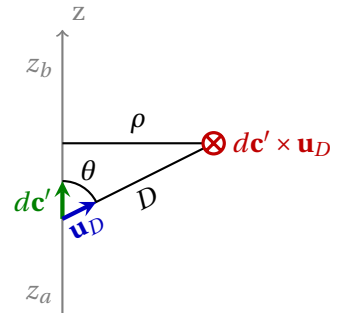
$$\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi} \oint_c \frac{d\mathbf{c}' \times \mathbf{u}_D}{D^2},$$

missä integraali on nyt z -akselia pitkin eli $d\mathbf{c}' = \mathbf{u}_z dz$ integroimisrajoilla z_a ja z_b . Oheisen suorakulmaisen kolmion ja vektorisuuntien avulla saadaan

$$d\mathbf{c}' \times \mathbf{u}_D = \mathbf{u}_\varphi \sin\theta dz, \quad D = \frac{\rho}{\sin\theta},$$

joten

$$\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi} \int_{z_a}^{z_b} \frac{\mathbf{u}_\varphi \sin\theta dz}{\rho^2 / \sin^2\theta} = \mathbf{u}_\varphi \frac{I}{4\pi\rho^2} \int_{z_a}^{z_b} \sin^3\theta dz.$$



Nyt integraali näyttää melko yksinkertaiselta, mutta miten funktio θ :sta integroidaan z :n suhteen? Olkoon kenttäpiste xy -tasossa ($z = 0$) jolloin lähdepiste ($d\mathbf{c}'$) on z -akselin kohdassa $-z$, kun oletetaan että $\theta < \pi/2$. Tällöin

$$\begin{array}{c} \rho \\ \triangle \\ -z \end{array} \quad \tan\theta = \frac{\rho}{-z} \Rightarrow z = -\rho \cot\theta, \quad \frac{dz}{d\theta} = \frac{\rho}{\sin^2\theta} \Rightarrow dz = \frac{\rho}{\sin^2\theta} d\theta.$$

Entä jos $\theta > \pi/2$? Silloin saadaan positiivinen z , mutta kolmio ”kääntyy” ja kolmion sisäinen kulma on $\pi - \theta$ ja $\tan(\pi - \theta) = -\tan\theta$, joten lopputulos on täsmälleen sama.

Alkuperäisen piirroksen avulla voimme päätellä uusiksi integroimisrajoiksi θ_a ja $\pi - \theta_b$, joten integraali yksinkertaistuu huomattavasti ja saamme haetun lopputuloksen

$$\mathbf{H} = \mathbf{u}_\varphi \frac{I}{4\pi\rho} \int_{\theta_a}^{\pi-\theta_b} \sin\theta d\theta = \mathbf{u}_\varphi \frac{I}{4\pi\rho} [-\cos(\pi - \theta_b) + \cos\theta_a] = \mathbf{u}_\varphi \frac{I}{4\pi\rho} (\cos\theta_a + \cos\theta_b).$$

3. Virtasilmukka synnyttää magneettikentän, joka kaukana on kuin magneettisen dipolin kenttä. Verrataan kuitenkin kahden virtasilmukan kenttää silmukan keskipisteessä.

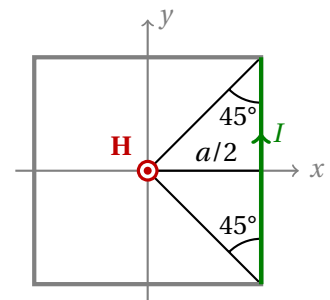
- (a) Laske neliönmuotoisen virtasilmukan magneettikenttä \mathbf{H}_1 sen keskipisteessä. Neliön sivu on a .
- (b) Laske r -säteisen ympyränmuotoisen virtasilmukan magneettikenttää \mathbf{H}_2 silmukan keskipisteessä.
- (c) Miten muoto vaikuttaa: jos silmukoissa kulkee sama tasavirta I ja niiden pinta-ala S on sama, kumman magneettikenttä on suurempi?
(Tässä tapauksessa silmukoilla on sama magneettinen momentti ja sen takia kaukana saadaan sama kenttä vaikka kenttä silmukoiden lähellä ovat erilaiset.)

Ratkaisu:

- (a) Olkoon virtasilmukka xy -tasossa kuten kuvassa. Edellisen tehtävän kaavan avulla saadaan silmukan keskipisteeseen kentän

$$\mathbf{H}_1 = 4\mathbf{H} = 4 \left[\mathbf{u}_z \frac{I}{4\pi a/2} (\cos 45^\circ + \cos 45^\circ) \right] = \mathbf{u}_z \frac{I 2\sqrt{2}}{\pi a}.$$

Tässä \mathbf{H} on kuvaan merkityn yhden sivun tuottama magneettikenttä ja symmetrian vuoksi koko silmukan kenttä on $4\mathbf{H}$, kun tarkastelu-piste on neliön keskipiste.



- (b) Olkoon virtasilmukka xy -tasossa kuten kuvassa. Nyt Biot–Savartin lain

$$\mathbf{H}_2 = \frac{I}{4\pi} \oint_c \frac{d\mathbf{c}' \times \mathbf{u}_D}{D^2}$$

soveltaminen on helppoa, koska $D = r = \text{vakio}$, $\mathbf{u}_D = -\mathbf{u}_\rho$ ja $d\mathbf{c}' = \mathbf{u}_\varphi r d\varphi$. Saadaan siis

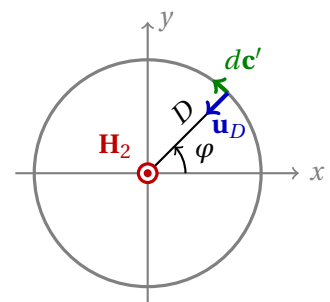
$$\mathbf{H}_2 = \frac{I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\mathbf{u}_z r d\varphi}{r^2} = \mathbf{u}_z \frac{I}{4\pi r} \int_0^{2\pi} d\varphi = \mathbf{u}_z \frac{I}{2r}.$$

Tämä kaava löytyy toki myös valmiina oppikirjasta.

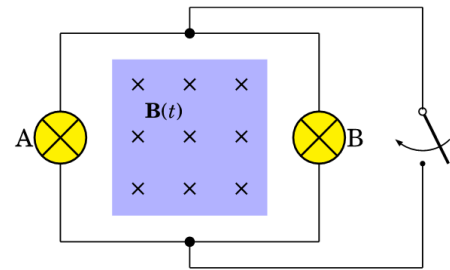
- (c) Neliön pinta-ala on a^2 ja ympyrän πr^2 . Nämä ovat yhtä suuret kun $r = \frac{a}{\sqrt{\pi}}$ ja silloin

$$\frac{H_1}{H_2} = \frac{I 2\sqrt{2}}{\pi a} \frac{2r}{I} = \frac{4\sqrt{2}}{\pi\sqrt{\pi}} \approx 1,0159,$$

eli neliön keskellä on 1,6% isompi kenttä.



1. Oheisen kuvan mukaan piirin läpi kulkeva magneettivuo muuttuu, ja $\mathbf{B}(t)$ indusoi sitä ympäröivään piiriin sähkömotorisen voiman, joka saa lamput A ja B palamaan. Kun kytkin suljetaan, tilanne muuttuu. Kerro perustellen, mitä lampuille tapahtuu kytkimen sulkemisen jälkeen.



Ratkaisu:

Kun kytkin suljetaan, virta, joka on kiertänyt lamppujen kautta, jakautuu uudella tavalla. Magneettivuon oikealla puolella se löytää helpomman tien kytkimen kautta (kuin lampun B vastuksen kautta). Siksi lampun B ylitse jää nollajännite, eli sen kautta ei kulje virtaa. Siis B-lamppu sammuu.

Mutta virta kiertää yhä lampun A kautta, koska sähkömotorinen voima ei ole kadonnut minnekään. Ja koska tässä uudessa piirissä on pienempi vastus (vain lamppu A) kuin alkuperäisessä (jossa oli sarjassa A ja B), niin virta on suurempi, ja A-lamppu palaa siksi kirkaammin kytkimen sulkemisen jälkeen kuin sitä ennen.

2. Tyhjiössä etenee ja värähtelee kulmataajuudella ω sähkömagneettinen aalto, jonka sähkökenttäfunktio on

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}_y E_0 \cos(ax) \cos(\omega t - bz)$$

Kenttävektori siis osoittaa kaikkialla $\pm y$ -suuntaan ja sen huippuarvo on E_0 , yksiköltään V/m.

- Mikä ehto tulee (reaalisille) vakioille a ja b , jotta kenttä toteuttaa aaltoyhtälön tyhjiössä (ϵ_0, μ_0), jossa ei ole lähteitä ($\rho = 0$ ja $\mathbf{J} = 0$).
- Hahmottele kuva sähkökentästä xz -tasossa hetkillä $t = 0$ ja $\omega t = \pi/2$, kun $b = 2a$. (Siis kuvaa \mathbf{E} -vektorin y -komponentti.)
- Tarkastele kentän vaihtelua x :n, z :n ja t :n funktiona. Miten kenttä käyttäytyy paikan suhteen, kun aika kulkee eteenpäin?

Ratkaisu:

- Aaltoyhtälö johdettiin luennolla Maxwellin yhtälöistä (toki löytyy kirjastakin), ja tyhjiössä ilman lähteitä se on

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0$$

Koska sähkökenttä on kaikkialla vakiosuuntainen, $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}_y E_y(\mathbf{r}, t)$, yhtälö yksinkertaistuu skalaarisiksi:

$$\nabla^2 E_y(\mathbf{r}, t) - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_y(\mathbf{r}, t) = 0$$

Ensimmäinen termi sisältää paikkaderivaatat x :n ja z :n suhteen (miksi muuten y -derivointi jää pois?):

$$\begin{aligned} \nabla^2 (\cos(ax) \cos(\omega t - bz)) &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \cos(ax) \cos(\omega t - bz) \\ &= -a^2 \cos(ax) \cos(\omega t - bz) + \cos(ax) (-(-b)^2) \cos(\omega t - bz) \\ &= -(a^2 + b^2) \cos(ax) \cos(\omega t - bz) \end{aligned}$$

(... kosinin toinen derivaatta on miinus kosini ...)

Toinen termi vaatii kaksinkertaisen derivaatan ajan suhteen, joka on yksinkertaisesti

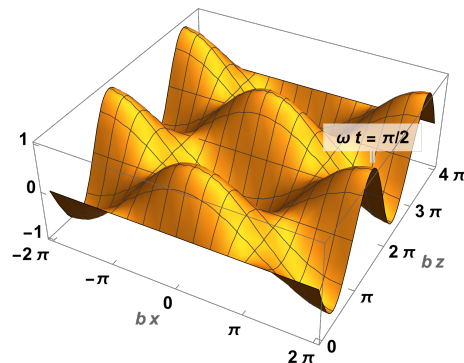
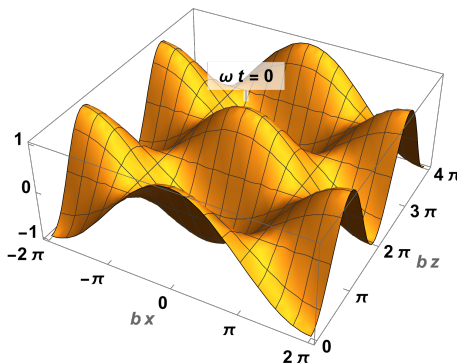
$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\cos(ax) \cos(\omega t - bz)) = -\omega^2 \cos(ax) \cos(\omega t - bz)$$

Summa summarum: jotta aaltoyhtälö pätsisi tälle kentälle, tulee olla

$$a^2 + b^2 = \mu_0 \epsilon_0 \omega^2$$

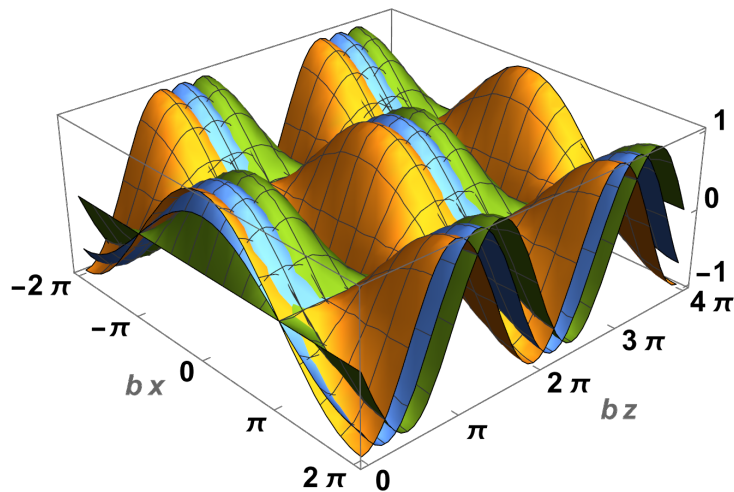
- Kentän lausekkeet ovat, kun $b = 2a$, tarkasteltavilla hetkillä:

$$\frac{E_y(\omega t = 0)}{E_0} = \cos(bx/2) \cos(bz) \quad \text{ja} \quad \frac{E_y(\omega t = \pi/2)}{E_0} = \cos(bx/2) \underbrace{\cos(\pi/2 - bz)}_{\sin(bz)}$$



- (c) Kentän jakautuma on sininmuotoinen sekä z - että x -suunnissa. Ajan kasvaessa aaltojen huiput etenevät $+z$ -suuntaan (tietyllä x -arvolla funktion $\cos(\omega t - bz)$ mukaan). Vasemmanpuoleisen kuvan z -riippuvuus on $\cos(bz)$ ja oikeanpuoleinen $\cos(\pi/2 - bz) = \sin(bz)$, mistä näkee että vaiheen maksimi (joka kosinilla on nollassa ja sinillä $\pi/2$:ssa) kulkee positiivisen z :n suuntaan. Sen sijaan x -suunnassa vastaavaa etenevää liikettä ei ole: siniaalto vain "pulppuilee" edestakaisin: $\cos(ax) \cos(\omega t)$. Voi sanoa, että aalto etenee z -suuntaan, mutta on "seisova aalto" x -suunnassa.

Ohessa vielä kuva, jossa kenttä on kolmella ajanheikellä: $\omega t = 0$ (oranssi), $\omega t = \pi/4$ (sininen), $\omega t = \pi/2$ (vihreä), ja josta voi ehkä huomata aallon etenemisen $+z$ -suuntaan.



Tämä on piirretty Mathematica-komennolla

```
Plot3D[{Cos[x/2] Cos[-z], Cos[x/2] Cos[π/4 - z], Cos[x/2] Cos[π/2 - z]}, {x, -2 π, 2 π}, {z, 0, 4 π},
  Ticks → {{-2 π, -π, 0, π, 2 π}, {0, π, 2 π, 3 π, 4 π}, {-1, 0, 1}}, AxesLabel → {b x, b z ""},
  LabelStyle → Directive[Bold, 14]]
```

3. Tarkastele seuraavaksi johtavassa homogeenisessa aineessa vaikuttavaa ajasta riippuvaa sähkömagneettista kenttää, jonka sähkö- ja magneettikenttäfunktiot ovat

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{u}_x E_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{u}_y e^{-\alpha z} (H_1 \cos(\omega t - \beta z) + H_2 \sin(\omega t - \beta z))\end{aligned}$$

Aineen parametrit ovat permittiivisyys ϵ , permeabilisuus μ ja johtavuus σ .

- Laske kenttäsuhteet H_1/E_0 ja H_2/E_0 käyttäen Faradayn lakia.
- Mitkä ehdot tulevat (reaalisille) vakioille α ja β , jotta kenttä toteuttaa Maxwellin yhtälöt (siis yhtälöt (1.163)–(1.166) dynaamisten kenttien kirjassa)?
- Hahmottele kuva sähkökentästä xz -tasossa hetkillä $t = 0$ ja $\omega t = \pi/2$, kun $\beta = 10\alpha$.
- Miten tämä kenttä eroaa luonteeltaan edellisen tehtävän kentästä?

Ratkaisu:

- (a) Faradayn laki (nyt on $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$)

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$$

Sähkökentän roottori on (tässä tapauksessa jäljelle jää vain derivointi z :n suhteen)

$$\begin{aligned}\nabla \times (\mathbf{u}_x E_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z)) &= \mathbf{u}_z \frac{\partial}{\partial z} \times (\mathbf{u}_x E_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z)) \\ &= \mathbf{u}_y E_0 (-\alpha e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) + \beta e^{-\alpha z} \sin(\omega t - \beta z)) \\ &= \mathbf{u}_y E_0 e^{-\alpha z} (-\alpha \cos(\omega t - \beta z) + \beta \sin(\omega t - \beta z))\end{aligned}$$

Toisaalta saadaan

$$\begin{aligned}-\mu \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{u}_y e^{-\alpha z} (H_1 \cos(\omega t - \beta z) + H_2 \sin(\omega t - \beta z))) \\ &= -\mathbf{u}_y \mu e^{-\alpha z} (-\omega H_1 \sin(\omega t - \beta z) + \omega H_2 \cos(\omega t - \beta z)) \\ &= +\mathbf{u}_y \omega \mu e^{-\alpha z} (H_1 \sin(\omega t - \beta z) - H_2 \cos(\omega t - \beta z))\end{aligned}$$

Kun näistä pannaan sini- ja kosinitermit yhtäsuuriksi, saadaan

$$-\alpha E_0 = -\omega \mu H_2 \quad \text{ja} \quad \beta E_0 = \omega \mu H_1$$

Siispä halutut kenttäsuhteet ovat

$$\frac{H_1}{E_0} = \frac{\beta}{\omega \mu} \quad \text{ja} \quad \frac{H_2}{E_0} = \frac{\alpha}{\omega \mu}$$

- (b) Maxwellin yhtälöistä on Faradayn laki jo toteutettuna. Siirrytään divergenssiyhtälöihin.

Ensimmäinen magneettikenttä: $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ tarkoittaa, että myös magneettikentän \mathbf{H} tulee olla divergenssitön, koska $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ ja μ on vakio. Tämähän pätee, sillä magneettikenttä on y -suuntainen mutta riippuu paikkakoordinaateista vain z :sta.

$$\nabla \cdot \mathbf{H}(z, t) = \frac{\partial}{\partial z} \underbrace{\mathbf{u}_z \cdot \mathbf{u}_y}_{=0} H_y(z, t) = 0$$

Seuraavaksi Gaussin laki $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$. Tätä varten pitää selvittää, mitä on varaustiheys ρ .

Sitä varten tarkastellaan virrantiheyttä, joka tähän johtavaan aineeseen syntyy, kun siihen vaikuttaa sähkökenttä. Virrantiheyden ja varaustiheyden välillä on jatkuvuusyhtälö, joka saadaan,

kun otetaan divergenssi Ampèren laista, joka sisältää siirrovirran ($\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \partial \mathbf{D} / \partial t$). Koska rotorin divergenssi katoaa, on oikean puolenkin divergenssin oltava nolla. Siis

$$\nabla \cdot \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{D}) = -\nabla \cdot \mathbf{J} \quad \text{eli} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{J}$$

Aineessa oleva sähkövirrantiheys on verrannollinen Ohmin lain mukaan sähkökenttään ($\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$), joten \mathbf{J} on x -suuntainen mutta riippuu vain z :sta (ja toki ajasta). Siis saman argumentin perusteella kuin yllä magneettikentän divergenssittömyyden kohdalla voidaan päätellä, että $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$.

Siis $\partial \rho / \partial t = 0$, joten kenttä ei synnytä varaustiheyttä.¹ Divergenssi katoaa jälleen:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \varepsilon \nabla \cdot \mathbf{E}(z, t) = \frac{\partial}{\partial z} \underbrace{\mathbf{u}_z \cdot \mathbf{u}_x}_{=0} E_x(z, t) = 0$$

Jäljelle jää Ampèren laki $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \varepsilon \partial \mathbf{E} / \partial t$. Lasketaan termit erikseen. Käytetään hyväksi (a)-kohdan tulosta ja kirjoitetaan magneettikenttä E_0 :n avulla:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{u}_y e^{-\alpha z} (H_1 \cos(\omega t - \beta z) + H_2 \sin(\omega t - \beta z)) \\ &= \mathbf{u}_y \frac{E_0}{\omega \mu} e^{-\alpha z} (\beta \cos(\omega t - \beta z) + \alpha \sin(\omega t - \beta z)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{u}_z \times \mathbf{u}_y \frac{\partial}{\partial z} H_y(z, t) \\ &= -\mathbf{u}_x \frac{E_0}{\omega \mu} \left[(-\alpha) e^{-\alpha z} (\beta \cos(\omega t - \beta z) + \alpha \sin(\omega t - \beta z)) \right. \\ &\quad \left. + e^{-\alpha z} (\beta^2 \sin(\omega t - \beta z) - \alpha \beta \cos(\omega t - \beta z)) \right] \\ &= \mathbf{u}_x \frac{E_0}{\omega \mu} e^{-\alpha z} (2\alpha \beta \cos(\omega t - \beta z) + (\alpha^2 - \beta^2) \sin(\omega t - \beta z)) \end{aligned}$$

Virrantiheystermit \mathbf{J} syntyy johtavuudesta:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}_x \sigma E_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z)$$

Ja lopuksi siirrosvirtatermi:

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} &= \mathbf{u}_x \varepsilon E_0 e^{-\alpha z} \frac{\partial}{\partial t} \cos(\omega t - \beta z) \\ &= -\mathbf{u}_x \omega \varepsilon E_0 e^{-\alpha z} \sin(\omega t - \beta z) \end{aligned}$$

Kun nämä kolme termiä yhdistetään ($\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \varepsilon \partial \mathbf{E} / \partial t$) ja erotetaan sinien ja kosinien kertoimet, saadaan seuraavat kaksi ehtoa:²

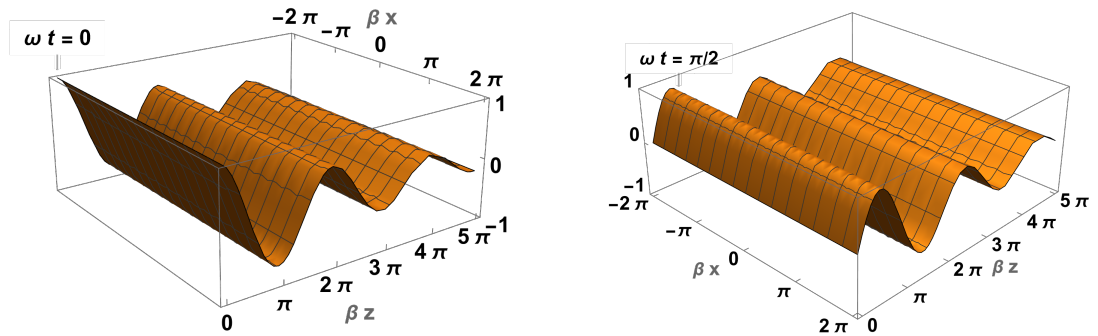
$$\begin{cases} 2\alpha\beta &= \omega\mu\sigma \\ \beta^2 - \alpha^2 &= \omega^2\mu\varepsilon \end{cases} \quad (!!!)$$

¹Yhtälö $\partial \rho / \partial t = 0$ sallii kyllä staattisen varaustiheyden ρ_0 (sellaisen joka ei riipu ajasta), mutta staattiset varaukset (kuten myöskään staattinen magneettikenttä) eivät vuorovaikuta tässä dynaamisessa tilanteessa.

²Näistä ehdoista voi tietysti ratkaista parametrit α ja β eksplisiittisesti materiaavakoiden ε, μ, σ ja kulmataajuuden ω funktiona. Tuloksena pitkiä neliöjuurilausekkeita.

(c) Kentän lausekkeet ovat, kun $\beta = 10\alpha$, tarkasteltavilla hetkillä:

$$\frac{E_x(\omega t = 0)}{E_0} = e^{-z/10} \cos(\beta z) \quad \text{ja} \quad \frac{E_x(\omega t = \pi/2)}{E_0} = e^{-z/10} \underbrace{\cos(\pi/2 - \beta z)}_{\sin(\beta z)}$$

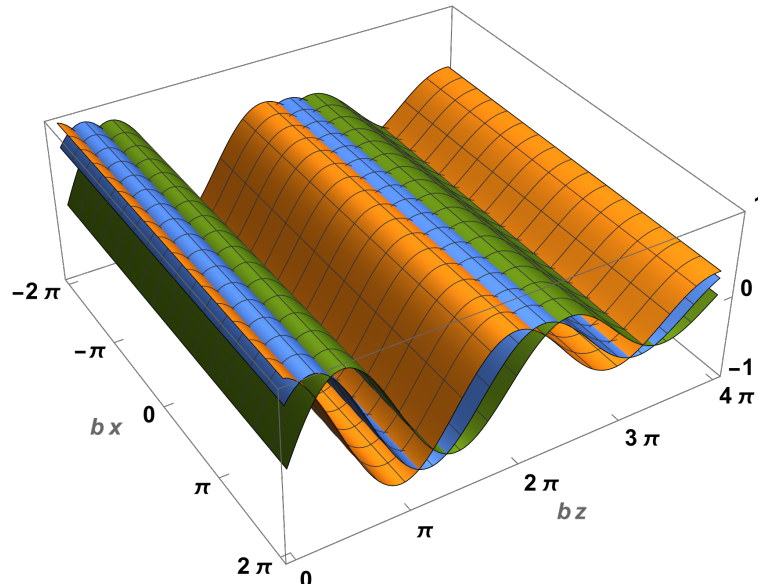


(d) Tämä aalto riippuu vain yhdestä paikkakoordinaatista, z :sta. Eli se on aina, kullakin hetkellä vakio, kun z on vakio, esim. xy -tasossa. Sitä voi kutsua tasoallokseksi (mitä ei voi sanoa edellisen tehtävän kentästä, joka annetulla $z =$ vakio-tasolla vaihteli sininmuotoisesti x :n suhteen).

Tämän 3-tehtävän kentän käyttäytyminen z :n suhteen on kahdenlaista. Ensinnäkin, kuten 2-tehtävän kenttä, sen vaihe kulkee positiiviseen z -akselin suuntaan (parametrin β määräämää vauhtia). Mutta se myös vaimenee edetessään (kun z kasvaa), kuten kuvasta näkyy. Vaimenemisen voimakkuuden määrää α -parametri. Kyseessä on vaimeneva tasoaalto.

Kannattaa huomata, että aineen johtavuus σ aiheuttaa vaimenemisen. Nimittäin kaavojen (!!!) mukaan rajatapauksessa $\sigma = 0$ ratkaisuksi tulee $\alpha = 0$ (ja tällöin etenemiskerroin on $\beta = \omega \sqrt{\mu\epsilon}$).

Ja vielä taas kuva, jossa kenttä on kolmella ajanhetkellä: $\omega t = 0$ (oranssi), $\omega t = \pi/4$ (sininen), $\omega t = \pi/2$ (vihreä). Tämäkin aalto, vaimeneva, etenee $+z$ -suuntaan.



Mathematica-komento:

```
Plot3D[{Exp[-z/10] Cos[-z], Exp[-z/10] Cos[pi/4 - z], Exp[-z/10] Cos[pi/2 - z]}, {x, -2 pi, 2 pi}, {z, 0, 4 pi},
  Ticks -> {{-2 pi, -pi, 0, pi, 2 pi}, {0, pi, 2 pi, 3 pi, 4 pi, 5 pi}, {-1, 0, 1}}, AxesLabel -> {bx, bz ""},
  LabelStyle -> Directive[Bold, 14], PlotPoints -> 100, PlotRange -> {-1, 1}]
```

1. (a) Laske z^2 ja \sqrt{z} tarkasti kompleksiluvulle $z = -1 + j\sqrt{3}$. Esitä sievennetyt lopputulokset reaali- ja imaginaariosien avulla ilman liukulukuja tai trigonometrisia funktiota. (Vastauksessa saa toki olla kokonaislukujen neliöjuuria.)
- (b) Mitä voit päätellä kompleksivektorien \mathbf{a} ja \mathbf{b} reaali- ja imaginaariosista, jos $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0$ ja $\mathbf{b} \times \mathbf{b}^* = \mathbf{0}$? (Oletetaan että kumpikaan vektori ei ole nolla.)

Ratkaisu:

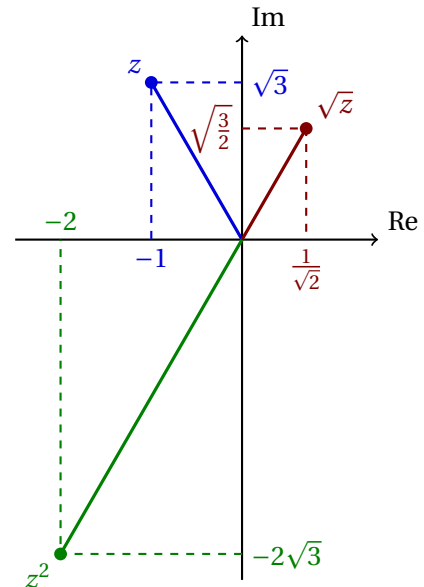
- (a) Neliö on helppo laskea kertomalla kompleksiluku itsensä kanssa:

$$z^2 = (-1 + j\sqrt{3})(-1 + j\sqrt{3}) = 1 - j2\sqrt{3} - 3 = -2 - j2\sqrt{3}$$

Neliöjuuren voi laskea ratkaisemalla a, b yhtälöstä $\sqrt{z} = \sqrt{-1 + j\sqrt{3}} = a + jb$, tai ehkä helpommin napakoordinaattiesityksen avulla:

$$z = |z| e^{j\varphi}, \quad \begin{cases} |z| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2 \\ \varphi = \arctan \frac{\sqrt{3}}{-1} = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{z} &= (2 e^{j2\pi/3})^{(1/2)} = \sqrt{2} e^{j\pi/3} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} + j \sin \frac{\pi}{3} \right) \\ &= \sqrt{2} \left(\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + j \sqrt{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$



Huom: Laskin (tai matematiikkaohjelmisto) antaa $\arctan(-\sqrt{3}) = -\pi/3 = -60^\circ$, mutta tämä selvästi ei ole oikea arkustangentin haara (ks. kuva). Tangenttifunktio on π -periodinen joten laskimen antamaan kulmaan pitää tarvittaessa lisätä (tai vähentää) π , jotta saadaan oikea tulos.

- (b) Lasketaan auki:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} &= (\mathbf{a}_r + j\mathbf{a}_i) \cdot (\mathbf{a}_r + j\mathbf{a}_i) = \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_r + j2\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_i - \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_i = |\mathbf{a}_r|^2 - |\mathbf{a}_i|^2 + j2\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_i = 0 \\ \Leftrightarrow |\mathbf{a}_r| &= |\mathbf{a}_i| \quad \text{ja} \quad \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_i = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b} \times \mathbf{b}^* &= (\mathbf{b}_r + j\mathbf{b}_i) \times (\mathbf{b}_r - j\mathbf{b}_i) = \underbrace{\mathbf{b}_r \times \mathbf{b}_r}_0 - j\mathbf{b}_r \times \mathbf{b}_i + j\mathbf{b}_i \times \mathbf{b}_r + \underbrace{\mathbf{b}_i \times \mathbf{b}_i}_0 = -2j\mathbf{b}_r \times \mathbf{b}_i = 0 \\ \Leftrightarrow \mathbf{b}_r \times \mathbf{b}_i &= 0 \end{aligned}$$

Vektorin \mathbf{a} reaali- ja imaginaariosat ovat samanpituiset ja kohtisuorassa toisiaan vastaan. Vektorin \mathbf{b} reaali- ja imaginaariosa ovat yhdensuuntaiset.

[Vastaaville aikaharmonisille vektoreille $\mathbf{a}(t)$ ja $\mathbf{b}(t)$ voidaan päätellä, että ajan funktiona vektorin $\mathbf{a}(t)$ kärki piirtää ympyrää ja vektorin $\mathbf{b}(t)$ kärki piirtää edestakaista janaa. Ensi viikon tasoaalloille tämä liittyy vahvasti ympyräpolarisaatioon ja lineaariseen polarisaatioon.]

2. (a) Esitä aikaharmonista jännitettä

$$u(t) = U_0 [\cos(\omega t) + \sin(\omega t + \pi/3)], \quad U_0 = 5,0\text{V}, \quad f = 105\text{kHz}$$

vastaava kompleksinen jännite

$$U = U_r + jU_i = |U| e^{j\phi}.$$

Laske siis kompleksisen jännitteen reaali-osa, imaginaari-osa, itseisarvo ja vaihekulma.

- (b) Esitä kompleksista sähkökenttävektoria

$$\mathbf{E} = E_0 (\mathbf{u}_x - \mathbf{u}_y + j2\mathbf{u}_x) e^{-jkz}$$

vastaava ajasta riippuva aikaharmoninen kenttä $\mathbf{E}(t)$. Millaisen käyrän sähkökenttävektorin kärki piirtää ajan funktiona kun $z = 0$? Piirrä kuva ja selvitä mahdollinen kiertosuunta. (Vakiot E_0 ja k ovat reaalisia ja niiden yksiköt ovat V/m ja rad/m.)

Ratkaisu:

- (a) **Tapa 1:** Luennolla käsiteltyjen muunnosesimerkkien avulla muunnetaan kahdessa osassa

$$\begin{aligned} u_1(t) &= U_0 \cos(\omega t) && \longleftrightarrow & U_1 = U_0 \\ u_2(t) &= U_0 \sin(\omega t + \pi/3) && \longleftrightarrow & U_2 = -jU_0 e^{j\pi/3} \end{aligned}$$

lasketaan auki reaali-osa ja imaginaari-osa

$$\begin{aligned} U &= U_1 + U_2 = U_0 - jU_0 e^{j\pi/3} = U_0 - jU_0 \left(\cos \frac{\pi}{3} + j \sin \frac{\pi}{3} \right) = U_0 - jU_0 \left(\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= U_0 \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - j \frac{U_0}{2} \approx (9,3 - j2,5) \text{V} \end{aligned}$$

ja muunnetaan napakoordinaattimuotoon

$$\begin{aligned} |U| &= \sqrt{U_r^2 + U_i^2} = U_0 \sqrt{\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \left(-\frac{1}{2} \right)^2} = U_0 \sqrt{2 + \sqrt{3}} \approx 9,7\text{V} \\ \phi &= \arctan \frac{U_i}{U_r} = \arctan \left(\frac{-1}{2 + \sqrt{3}} \right) = -\frac{\pi}{12} = -15^\circ \\ U &= U_0 \sqrt{2 + \sqrt{3}} e^{-j\pi/12} \approx 9,7\text{V} \angle -15^\circ. \end{aligned}$$

Tapa 2: Muunnos kompleksimuodosta aikaharmoniseen muotoon on aina suoraviivaista. Kirjoitetaan auki ja hyödynnetään kosinin summakaavaa:

$$u(t) = \text{Re} \left\{ |U| e^{j\phi} e^{j\omega t} \right\} = |U| \cos(\omega t + \phi) = |U| [\cos(\omega t) \cos(\phi) - \sin(\omega t) \sin(\phi)]$$

Kirjoitetaan auki annettu $u(t)$ sinin summakaavan avulla:

$$u(t) = U_0 \left[\cos(\omega t) + \sin(\omega t) \underbrace{\cos \frac{\pi}{3}}_{1/2} + \cos(\omega t) \underbrace{\sin \frac{\pi}{3}}_{\sqrt{3}/2} \right] = U_0 \left[\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \cos(\omega t) + \frac{1}{2} \sin(\omega t) \right]$$

Vertaamalla näitä saamme kaksi yhtälöä mistä tuntemattomat $|U|$ ja ϕ ratkeavat

$$\begin{cases} |U| \sin \phi = -\frac{1}{2} U_0 \\ |U| \cos \phi = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) U_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tan \phi = \frac{-1/2}{1 + \sqrt{3}/2} = \frac{-1}{2 + \sqrt{3}} \\ |U|^2 = |U|^2 (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) = \left[\left(-\frac{1}{2} \right)^2 + \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \right] U_0^2 \end{cases}$$

Jatkamalla tästä saadaan selvästi sama tulos kuin yllä.

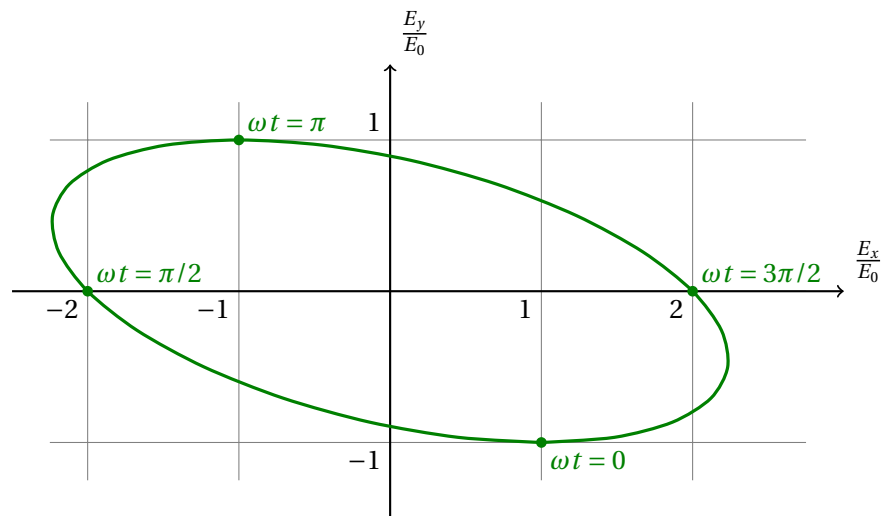
(b) Aikaharmoninen kenttä on

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(t) &= \operatorname{Re} \left\{ E_0 (\mathbf{u}_x - \mathbf{u}_y + j2\mathbf{u}_x) e^{-jkz} e^{j\omega t} \right\} \\
 &= E_0 \operatorname{Re} \left\{ (\mathbf{u}_x - \mathbf{u}_y + j2\mathbf{u}_x) [\cos(\omega t - kz) + j \sin(\omega t - kz)] \right\} \\
 &= E_0 (\mathbf{u}_x - \mathbf{u}_y) \cos(\omega t - kz) - 2E_0 \mathbf{u}_x \sin(\omega t - kz) \\
 &= \mathbf{u}_x E_0 [\cos(\omega t - kz) - 2 \sin(\omega t - kz)] - \mathbf{u}_y E_0 \cos(\omega t - kz)
 \end{aligned}$$

Kun $z = 0$ tämä yksinkertaistuu muotoon

$$E(t) = \mathbf{u}_x E_0 [\cos(\omega t) - 2 \sin(\omega t)] - \mathbf{u}_y E_0 \cos(\omega t)$$

ja sähkökenttävektorin kärki piirtää seuraavan ellipsin xy -tasossa. Kiertosuunta on kuvassa myötäpäivään.



3. Tarkastellaan viime viikolta tuttua aikaharmonista sähkökenttää, jota nyt esitetään kompleksivektorilla

$$\mathbf{E} = \mathbf{u}_y E_0 \cos(ax) e^{-jbz}, \quad a^2 + b^2 = k^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0.$$

Tarkasteltava alue on tyhjiö (μ_0, ϵ_0) jossa ei ole lähteitä ($\rho = 0, \mathbf{J} = 0$).

- (a) Laske magneettikenttä \mathbf{H} kompleksivektorimuodossa.
 (b) Laske kompleksinen Poyntingin vektori \mathbf{S} ja tehotiheyden aikakeskiarvo. Miten tehovirtauksen suunta täsmää viime viikon tulosten kanssa?

Ratkaisu:

- (a) Faradayn laki kompleksivektorimuodossa tyhjiössä

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mathbf{B} = -j\omega \mu_0 \mathbf{H}$$

antaa magneettikentäksi

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \frac{j}{\omega \mu_0} \nabla \times \mathbf{E} = \frac{j}{\omega \mu_0} \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_y & 0 \end{vmatrix} = \frac{j}{\omega \mu_0} \left[\mathbf{u}_z \frac{\partial E_y}{\partial x} - \mathbf{u}_x \frac{\partial E_y}{\partial z} \right] \\ &= \frac{j}{\omega \mu_0} \left[\mathbf{u}_z (-a) E_0 \sin(ax) e^{-jbz} - \mathbf{u}_x (-jb) E_0 \cos(ax) e^{-jbz} \right] \\ &= \frac{E_0}{\omega \mu_0} \left[\mathbf{u}_x (-b) \cos(ax) + \mathbf{u}_z (-ja) \sin(ax) \right] e^{-jbz}. \end{aligned}$$

- (b) Kompleksinen Poyntingin vektori on

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* = \frac{1}{2} \mathbf{u}_y E_0 \cos(ax) e^{-jbz} \times \frac{E_0^*}{\omega \mu_0} \left[\mathbf{u}_x (-b) \cos(ax) + \mathbf{u}_z (+ja) \sin(ax) \right] e^{+jbz} \\ &= \frac{|E_0|^2}{2\omega \mu_0} \left[\underbrace{\mathbf{u}_y \times \mathbf{u}_x}_{-\mathbf{u}_z} (-b) \cos^2(ax) + \underbrace{\mathbf{u}_y \times \mathbf{u}_z}_{+\mathbf{u}_x} (+ja) \underbrace{\cos(ax) \sin(ax)}_{\frac{1}{2} \sin(2ax)} \right] \\ &= \mathbf{u}_z \frac{b|E_0|^2}{2\omega \mu_0} \cos^2(ax) + j \mathbf{u}_x \frac{a|E_0|^2}{4\omega \mu_0} \sin(2ax). \end{aligned}$$

Tehotiheyden aikakeskiarvo on tämän reaaliosta

$$\mathbf{u}_z \frac{b|E_0|^2}{2\omega \mu_0} \cos^2(ax).$$

Viime viikolla [tehtävässä 6.2(c)] todettiin että kenttä (tai ehkä tarkemmin kentän vaihe) etenee $+z$ suuntaan ja nyt on osoitettu että teho virtaa samaan suuntaan, mikä kuullostaa fysikaalisesti hyvin järkevältä.

Viime viikon tulos että x -suunnassa on "seisova aalto" näkyy nyt sillä tavalla, että x -suuntaan ei keskimäärin virtaa tehoa. Tehotiheyden aikakeskiarvo tai etenevä tehotiheys riippuu toki x -koordinaatista kun sähkökenttä riippuu x -koordinaatista, ja se ei varmaan ole kovin suuri yllätys että tämä etenevä tehotiheys on (ainakin tässä tapauksessa) verrannollinen sähkökentän itseisarvon neliöön.

1. Tasoaalto etenee tyhjiössä. Tasoallon sähkökentän kompleksivektoriesitys on

$$\mathbf{E} = \mathbf{u}_z E_0 e^{j(2x-y)a}, \quad E_0 = 12 \frac{\text{V}}{\text{m}}, \quad a = 27 \frac{\text{rad}}{\text{m}}.$$

- Määritä tasoallon etenemissuunta, aaltoluku ja aallonpituus.
- Laske tasoallon magneettikentän kompleksivektoriesitys.
- Laske tasoallon kompleksinen Poyntingin vektori ja etenevä tehotiheys.

Ratkaisu:

(a) Selvitetään ensin tasoallon aaltovektori \mathbf{k}

$$\mathbf{E} = \mathbf{u}_z E_0 e^{j(2x-y)a} = \mathbf{u}_z E_0 e^{-j(-2ax+ay)} = \mathbf{u}_z E_0 e^{-j(k_x x + k_y y)} \Rightarrow \mathbf{k} = -2a\mathbf{u}_x + a\mathbf{u}_y$$

Etenemissuunta \mathbf{u}_k , aaltoluku k ja aallonpituus λ ovat

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_k &= \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} = \frac{a\mathbf{u}_y - 2a\mathbf{u}_x}{\sqrt{(-2a)^2 + a^2}} = \frac{\mathbf{u}_y - 2\mathbf{u}_x}{\sqrt{5}}, \\ k &= |\mathbf{k}| = a\sqrt{5} \approx 60 \frac{\text{rad}}{\text{m}}, \\ \lambda &= \frac{2\pi}{k} \approx 10 \text{ cm}. \end{aligned}$$

(b) Magneettikentän voi laskea Faradayn lain avulla, tai vielä helpommin vastaavalla tasoaaltoyhtälöllä (tasoalloille voidaan Maxwellin yhtälöissä korvata $\nabla \rightarrow -j\mathbf{k}$):

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \times \mathbf{E} &= \omega\mu_0 \mathbf{H} \\ \Rightarrow \mathbf{H} &= \frac{k}{\omega\mu_0} \mathbf{u}_k \times \mathbf{E} = \frac{k}{\omega\mu_0} \frac{\mathbf{u}_y - 2\mathbf{u}_x}{\sqrt{5}} \times \mathbf{u}_z E_0 e^{j(2x-y)a} = \frac{\mathbf{u}_x + 2\mathbf{u}_y}{\sqrt{5}} \frac{kE_0}{\omega\mu_0} e^{j(2x-y)a} \\ &= \frac{\mathbf{u}_x + 2\mathbf{u}_y}{\sqrt{5}} H_0 e^{j(2x-y)a}, \quad H_0 = \frac{kE_0}{\omega\mu_0} = \frac{E_0}{\eta_0} \approx 32 \frac{\text{mA}}{\text{m}} \end{aligned}$$

(c) Kompleksinen Poyntingin vektori on

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* = \frac{1}{2} \mathbf{u}_z E_0 e^{j(2x-y)a} \times \frac{\mathbf{u}_x + 2\mathbf{u}_y}{\sqrt{5}} \frac{E_0}{\eta_0} e^{-j(2x-y)a} = \frac{\mathbf{u}_y - 2\mathbf{u}_x}{\sqrt{5}} \frac{E_0^2}{2\eta_0}$$

joka tässä tapauksessa on reaalinen, joten keskimääräinen etenevä tehotiheys = hetkellinen tehotiheys = $E_0^2 / (2\eta_0) \approx 0,19 \text{ W/m}^2$ ja energia virtaa \mathbf{S} :n suuntaan eli suuntaan \mathbf{u}_k .

2. Oikeakätisesti ympyräpolarisoitunut tasoaalto etenee tyhjiössä suuntaan $(\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_z)/\sqrt{2}$. Aallon taajuus on 97 MHz ja magneettikentän amplitudi on 57 A/m. Olkoon sähkökenttä $+y$ -suuntainen origossa ajanhetkellä $\omega t = 0$.

Kirjoita lauseke aallon kompleksiselle sähkökenttävektorille. (Esitä lauseke symbolisessa muodossa sopivilla vakioilla ja laske vakioiden lukuarvot ja yksiköt.)

Ratkaisu:

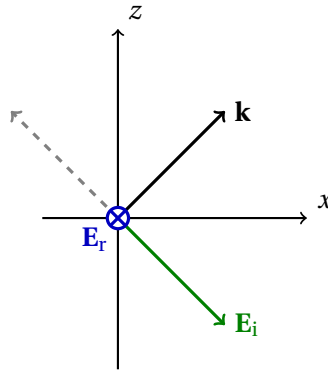
Haetaan sähkökenttä muodossa

$$\mathbf{E} = (\mathbf{E}_r + j\mathbf{E}_i) e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}},$$

missä aaltovektori on annettujen tietojen perusteella

$$\mathbf{k} = \mathbf{u}_k k_0, \quad \mathbf{u}_k = \frac{\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_z}{\sqrt{2}}, \quad k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = \frac{2\pi f}{c}.$$

Sähkökenttä on aina kohtisuorassa etenemissuuntaa vastaan, joten reaaliset vakiovektorit \mathbf{E}_r ja \mathbf{E}_i ovat molemmat kohtisuorassa \mathbf{k} -vektoria vastaan. Tasoaalto on ympyräpolarisoitunut jos $|\mathbf{E}_r| = |\mathbf{E}_i|$ ja $\mathbf{E}_r \perp \mathbf{E}_i$. Origossa ajanhetkellä $\omega t = 0$ reaalinen ajasta riippuva kenttä on $\mathbf{E}(\mathbf{r} = \mathbf{0}, t = 0) = \mathbf{E}_r$, joten valitaan aluksi $\mathbf{E}_r = \mathbf{u}_y E_0$, missä E_0 on positiivinen vakio. Vektorin \mathbf{E}_i selvittämiseen on hyvä piirtää kuva:



Kuvassa on xz -taso ja y -akseli on katsojasta pois päin (paperin sisään). Vektori \mathbf{E}_i pitää olla kuvassa joko oikealle alaspäin (vihreä nuoli) tai vasemmalle ylöspäin (harmaa nuoli katkoviivalla) jotta vektorit \mathbf{k} , \mathbf{E}_r ja \mathbf{E}_i ovat kaikki kohtisuorassa toisiaan vastaan. Oikea valinta on vihreä nuoli, eli $\mathbf{E}_i = (\mathbf{u}_x - \mathbf{u}_z)E_0/\sqrt{2}$, kun halutaan *oikeakätinen* ympyräpolarisaatio. Pyörimissuunnan voi selvittää esim. näin: Valitaan paikaksi origo (missä $e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = 1$). Ajanhetkellä $\omega t = 0$ sähkökentän suunta on \mathbf{E}_r ja neljännesjaksoa myöhemmin hetkellä $\omega t = \pi/2$ suunta on $-\mathbf{E}_i$, joten kiertosuunta on tässä oikeakätinen.

Tasoaallon sähkökentän ja magneettikentän amplitudeille pätee (polarisaatiosta riippumatta) että $E_0/H_0 = \eta_0$, joten haluttu sähkökenttä voidaan esittää muodossa

$$\mathbf{E} = \left(\mathbf{u}_y + j \frac{\mathbf{u}_x - \mathbf{u}_z}{\sqrt{2}} \right) E_0 e^{-jk_0(x+z)/\sqrt{2}}, \quad E_0 = \eta_0 H_0 \approx 21 \frac{\text{kV}}{\text{m}}, \quad k_0 = \frac{2\pi f}{c} \approx 2,0 \frac{\text{rad}}{\text{m}}.$$

(Ympyräpolarisaation tapauksessa $\mathbf{E}(t)$ ja $\mathbf{H}(t)$ ovat vakiopituisia vektoreita joiden suunta on paikan ja ajan funktio. Tällä lausekkeella $|\mathbf{E}(t)| = E_0$ kaikilla t ja kaikkialla, vaikka kompleksivektorin itseisarvo $|\mathbf{E}| = E_0\sqrt{2}$.)

3. Tarkastellaan koaksiaalikaapelia, jonka sisäsäde on a ja ulkosäde on b . Eristeine (alueessa $a < \rho < b$) on polyeteeniä, jonka suhteellinen permittiivisyys on 2,3 ja johtavuus oletetaan nolllaksi. Oletetaan että sisäjohtin ($\rho \leq a$) ja ulkojohtin ($\rho \geq b$) ovat ideaalijohteita. Aikaharmoninen sähkömagneettinen kenttä (taajuudella 410 MHz) rajoittuu siis poikittaistasossa sisäjohtimen ja ulkojohtimen väliin alueeseen ($a < \rho < b$).

(a) Magneettikentän kompleksivektoriesitys on (sylinterikoordinaatistossa)

$$\mathbf{H} = \mathbf{u}_\varphi \frac{B}{\rho} e^{-jkz}, \quad a < \rho < b,$$

missä B on positiivinen vakio ja aaltoluku $k = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon}$. Määritä sähkökentän kompleksivektoriesitys.

(b) Tarkista että kentät (\mathbf{E} ja \mathbf{H}) toteuttavat kaikki Maxwellin yhtälöt. (Eristeineessä ei ole vapaita varauksia eikä virtoja.)

(c) Kunka paljon tehoa koaksiaalijohdossa kulkee, jos $B = 0,42 \text{ A}$, $a = 1,4 \text{ mm}$ ja $b = 3,6 \text{ mm}$?

Ratkaisu:

(a) Lasketaan sähkökenttä Ampèren lain avulla:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{j\omega\epsilon} \nabla \times \mathbf{H} = \frac{-j}{\omega\epsilon} \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \mathbf{u}_\rho & \rho\mathbf{u}_\varphi & \mathbf{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \rho H_\varphi & 0 \end{vmatrix} = \frac{-j}{\omega\epsilon\rho} \left[\mathbf{u}_z \frac{\partial}{\partial\rho} (Be^{-jkz}) - \rho \frac{\partial}{\partial z} (Be^{-jkz}) \right] \\ &= \mathbf{u}_\rho \frac{j}{\omega\epsilon\rho} (-jk) Be^{-jkz} = \mathbf{u}_\rho \frac{\eta B}{\rho} e^{-jkz}, \quad \eta = \frac{k}{\omega\epsilon} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_r\epsilon_0}} \end{aligned}$$

(b) Ampèren laki toteutuu (a)-kohdan mukaan. Tarkistetaan Faradayn laki:

$$\nabla \times \mathbf{E} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \mathbf{u}_\rho & \rho\mathbf{u}_\varphi & \mathbf{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_\rho & 0 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{u}_\varphi \frac{\partial E_\rho}{\partial z} = \mathbf{u}_\varphi (-jk) \frac{\eta B}{\rho} e^{-jkz} = -j \underbrace{k\eta}_{\omega\mu_0} \mathbf{u}_\varphi \frac{B}{\rho} e^{-jkz} = -j\omega\mu_0\mathbf{H}$$

Tarkistetaan Gaussin laki:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \epsilon \nabla \cdot (\mathbf{u}_\rho E_\rho) = \epsilon \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\rho} \left(\rho \frac{\eta B}{\rho} e^{-jkz} \right) = 0,$$

niinkun pitää lähteettömässä alueessa. Tarkistetaan vielä viimeinen yhtälö:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \mu_0 \nabla \cdot (\mathbf{u}_\varphi B_\varphi) = \mu_0 \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\varphi} \left(\frac{\eta B}{\rho} e^{-jkz} \right) = 0.$$

Eli kaikki Maxwellin yhtälöt toteutuvat.

(c) Kompleksinen Poyntingin vektori on

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* = \frac{1}{2} \mathbf{u}_\rho \frac{\eta B}{\rho} e^{-jkz} \times \mathbf{u}_\varphi \frac{B^*}{\rho} e^{+jkz} = \mathbf{u}_z \frac{\eta |B|^2}{2\rho^2}.$$

Etenevä teho saadaan integroimalla kompleksisen Poyntingin vektorin reaalisaa poikkipinnan yli:

$$P_{\text{et}} = \int_0^{2\pi} \int_a^b \text{Re}\{\mathbf{S}\} \cdot \mathbf{u}_z \rho \, d\rho \, d\varphi = 2\pi \frac{\eta |B|^2}{2} \int_a^b \frac{1}{\rho} \, d\rho = \pi \eta |B|^2 \ln \frac{b}{a} \approx 130 \text{ W}.$$

1. Suomen tasavallan Valtioneuvoston sosiaali- ja terveysministeriön asetuksessa 1045/2018 ionisoimattoman väestöä koskevan säteilyn altistuksen enimmäisarvoista säädetään mm. seuraavaa:

Taajuuksilla 10–400 MHz on säteilyn tehotiheyden enimmäisarvo $2,0 \text{ W/m}^2$.

Tarkastele tilannetta taajuudella 40,68 MHz (se on yksi ns. ISM-radiotaajuuskanavista, "industrial, scientific, and medical applications"). Kuinka suuri voi tällöin olla tasoallon sähkökentän voimakkuuden amplitudi? Entä magneettikentän?

Helsingissä 22 päivänä marraskuuta 2018

Sosiaali- ja terveysministeriön asetus ionisoimattoman säteilyn väestölle aiheuttaman altistuksen rajoittamisesta

Sosiaali- ja terveysministeriön päätöksen mukaisesti säädetään säteilylain (859/2018) 161 §:n 4 momentin nojalla:

**2 §
Määritelmät**

Tässä asetuksessa tarkoitetaan:

1) *sähkömagneettisilla kentillä* staattisia sähkökenttiä, staattisia magneettikenttiä ja ajallisesti vaihtelevia sähkökenttiä, magneettikenttiä ja sähkömagneettisia aaltoja, joiden taajuus on enintään 300 GHz;

**3 §
Altistuksen raja-arvot sähkömagneettisille kentille**

Liitteessä 1 säädetään altistuksen raja-arvoista sähkömagneettisille kentille.

Liitteessä 1 säädetään 1 Hz–300 GHz sähkömagneettisten kenttien aiheuttaman altistuksen raja-arvojen soveltamiseksi toimenpidetasot. Jos altistusta ei voida määrittää luotettavasti, on sovellettava toimenpidetasoja.

Liitteen 1 taulukossa 1.2 säädettyä magneettivuontiheyden toimenpidetasoa sovelletaan tilanteissa, joissa aktiivisten implantoitavien laitteiden häiriintymisestä tai magneettikentän vetovoimavaikutuksesta aiheutuva vaaraa ei voida muutoin estää.

Helsingissä 22 päivänä marraskuuta 2018

Perhe- ja peruspalveluministeri
Annika Saarikko

Hallitussihteeri
Helena Korpinen

Ratkaisu:

Poyntingin vektori S antaa aallon tehotiheyden:

$$S = \frac{E^2}{2\eta_0} = \frac{\eta_0 H^2}{2}$$

josta saadaan (kun on $S = 2,0 \text{ W/m}^2$ ja $\eta_0 = 377 \Omega$): $E = 39 \text{ V/m}$ ja $H = 0,10 \text{ A/m}$.

Sosiaali- ja terveysministeriön asetuksessa 1045/2018 on seuraava liite, jossa on laskettu myös kenttien sallitut maksimiarvot. Kannattaa huomata kuitenkin, että perhe- ja peruspalveluministeri Saarikko on jostain syystä halunnut käyttää kenttien tehollisarvoja, jotka ovat huippuarvoihin verrattuna $\sqrt{2}$ -kertaa pienempiä:

Taulukko 1.7. Toimenpidetasot sähkö- ja magneettikentän voimakkuuden, magneettivuon tiheyden tehollisarvoina ja ekvivalenttina tehotiheyksinä taajuusalueella 100 kHz–300 GHz.

Taajuusalue	Sähkökentän voimakkuus V/m	Magneettikentän voimakkuus A/m	Magneettivuon tiheys μT	Ekvivalenttinen tehotiheys W/m^2
0,1–0,15 MHz	87	5	6,25	-
0,15–1 MHz	87	$0,73/f$	$0,92/f$	-
1–10 MHz	$87/f^{1/2}$	$0,73/f$	$0,92/f$	-
10–400 MHz	28	0,073	0,092	2
400–2000 MHz	$1,38f^{1/2}$	$0,0037f^{1/2}$	$0,0046f^{1/2}$	$f/200$
2–300 GHz	61	0,16	0,20	10

Huomautus 1: Taulukossa 1.7 f on taajuus megahertseinä.

Huomautus 2: Taulukossa 1.7 ekvivalenttinen tehotiheys on sähkökentän voimakkuuden neliö jaettuna vapaan tilan aaltoimpedanssilla (377Ω) tai magneettikentän voimakkuuden neliö kerrottuna vapaan tilan aaltoimpedanssilla.

Huomautus 3: Taulukossa 1.7 sähkö- ja magneettikentän voimakkuuden, magneettivuon tiheyden tehollisarvon neliö ja ekvivalenttinen tehotiheys määritetään keskiarvona kuuden minuutin ajanjaksoilta taajuusalueella 100 kHz–10 GHz.

2. Veden permittiivisyyden voi mallintaa melko laajalla taajuusalueella (0 – 100 GHz) ns. Debye-mallilla, jonka mukaan sen reaaliosa laskee pehmeästi matalien taajuuksien arvosta ϵ_{st} millimetriaaltoalueen arvoon ϵ_{mm} :

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_{mm} + \frac{\epsilon_{st} - \epsilon_{mm}}{1 + j\omega\tau}$$

Vedelle 20 asteen lämpötilassa arvot ovat $\epsilon_{st} = 80\epsilon_0$ ja $\epsilon_{mm} = 5,0\epsilon_0$. Parametri τ on ns. relaksaatio-aika, joka kertoo vesimolekyylien vastenopeudesta värähtelevässä kentässä, noin 10 ps. (Merivedellä permittiivisyyden imaginaariosaan vaikuttaa myös johtavuustermi, mutta tarkastellaan tässä vähäsuolaista järvivettä, ja unohtetaan johtavuustermi.)

- Millä taajuudella veden permittiivisyyden imaginaariosa on (itseisarvoltaan) suurimmillaan?
- Tarkastele radioaaltoa, joka tunkeutuu veteen taajuudella $f = 3,4$ GHz. Tasoaallon kenttä on verrannollinen funktioon $\exp(-jkz)$. Piirrä kenttä ajanhetkillä $t = 0$ ja $t = \pi/(2\omega)$ veden syvyyden z funktiona.
- Kuinka monta desibeliä (metrin matkalla) aalto vaimenee vedessä tällä taajuudella?

Ratkaisu:

Veden permittiivisyysfunktio erotettuna reaali- ja imaginaariosaan on

$$\begin{aligned} \epsilon(\omega) &= \epsilon_{mm} + \frac{\epsilon_{st} - \epsilon_{mm}}{1 + j\omega\tau} = \epsilon_{mm} + (\epsilon_{st} - \epsilon_{mm}) \frac{1 - j\omega\tau}{(1 + j\omega\tau)(1 - j\omega\tau)} \\ &= \epsilon_{mm} + \frac{(\epsilon_{st} - \epsilon_{mm})}{1 + (\omega\tau)^2} - (\epsilon_{st} - \epsilon_{mm}) \frac{j\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2} \end{aligned}$$

- Imaginääriosan taajuusriippuvuus on $\omega\tau/(1 + \omega^2\tau^2)$. Sen maksimiarvo saadaan etsimällä derivaatan nollakohta ω :n suhteen:

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2} \right) = \frac{\tau(1 + (\omega\tau)^2) - 2\omega\tau^2 \cdot \omega\tau}{(1 + (\omega\tau)^2)^2}$$

Tämän nollakohta on $\omega\tau = 1$. Ja kun imaginääriosaa menee nolliin suurilla ja pienillä taajuuksilla, saadaan maksimitaajuudeksi

$$f_{\max} = \frac{\omega_{\max}}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\tau} \approx 16 \text{ GHz}$$

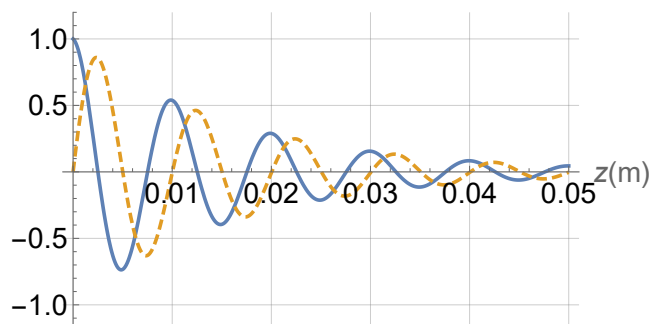
- Koska vesi on häviöllistä, on aaltoluku k kompleksinen ja aalto vaimenee. Taajuudella $f = 3,4$ GHz, jolla veden permittiivisyys on noin $\epsilon = (76,7 - j15,3)\epsilon_0$, saadaan tulokseksi

$$k = \omega\sqrt{\epsilon\mu_0} = k_r - jk_i \approx (627 - j62) \frac{1}{\text{m}}$$

Aikariippuva kenttä on

$$E(z, t) = \text{Re} \left\{ e^{-jkz} e^{j\omega t} \right\} = \text{Re} \left\{ e^{-jk_r z} e^{-k_i z} e^{j\omega t} \right\} = e^{-k_i z} \cos(\omega t - k_r z)$$

Hetkellä $\omega t = 0$ tämä on $\exp(-k_i z) \cos(k_r z)$ ja neljännesaallon päästä se on $\exp(-k_i z) \sin(k_r z)$. Nämä oheisessa kuvassa sinisellä ja oranssilla. Kuten kuvasta näkyy, on aallon tunkeutumisyvyys varsin pieni, vain vajaat kaksi senttimetriä!



(c) Vaimennus desibeleinä metrin matkalla on

$$20 \log_{10} \left(e^{-k_i z} \right) \approx 20 \log_{10} \left(e^{-62,0 \frac{1}{\text{m}} \cdot 1 \text{m}} \right) \approx 540 \text{ dB}$$

3. (a) Perehdy induktiolieden toimintaan. Hae informaatiota erilaisista lähteistä ja tutki sen periaatetta. (Raportoi myös käyttämäsi lähteet.) Miten induktioliesi eroaa perinteisestä sähköliedestä, jossa levyn sähkövastus kuumenee ja lämpö siirtyy johtumalla liedellä olevaan pannuun tai kattilaan?
- (b) Minkä suuruisia ovat induktioliedellä käytettyjen astioiden materiaaliparametrit? Arvioi näiden parametrien nojalla pyörrevirtojen tunkeutumissyvyys kattilan pohjaan.

Ratkaisu:

Induktioliedessä kymmenien kilohertsien taajuudella toimiva virtakela indusoi pyörrevirtoja kattilan pohjaan, jotka lämmittävät sitä. Jos induktioliedellä käytettävän kattilan pohja on terästä, voidaan arvioida johtavuudeksi $\sigma = 2 \cdot 10^6 \text{ S/m}$ ja suhteelliseksi permeabilisuudeksi $\mu_r = 300$ (teräksiä on tietysti monenlaisia, joten nämä lukemat voivat vaihdella). Jos lieden virtakelan värähtelytaajuus on 30 kHz, saadaan tunkeutumissyvyydeksi (onpa aika pieni, mutta virrantiheys sillä alueella sitäkin suurempi)

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma}} \approx 0,12 \text{ mm}$$

1. Tasoaalto saapuu ilmasta dielektrisen aineen (taitekerroin $n = 2$) rajapintaan 70° asteen tulokulmassa.

- (a) Mikä on heijastuskerroin, jos tuleva aalto on kohtisuorapolarisoitu?
- (b) Mikä on heijastuskerroin, jos tuleva aalto on yhdensuuntaispolarisoitu?
- (c) Mikä on heijastuneen aallon polarisaatio, jos tuleva aalto on oikeakätisesti ympyräpolarisoitu? (Muista kätsisyys!)

Ratkaisu:

Kun tulokulma on $\theta_1 = 70^\circ$, tulee Snellin lain $\sin\theta_1 = n \sin\theta_2$ mukaan taitekulmaksi $\theta_2 \approx 28^\circ$. Nyt on $\mu = \mu_0$ ja $\varepsilon = n^2\varepsilon_0$.

- (a) Kohtisuorapolarisoidun aallon heijastuskerroin on

$$R_{\text{KP}} = \frac{\cos\theta_1 - n \cos\theta_2}{\cos\theta_1 + n \cos\theta_2} \approx -0,68$$

- (b) Yhdensuuntaispolarisoidun aallon heijastuskerroin on

$$R_{\text{YP}} = \frac{\cos\theta_2 - n \cos\theta_1}{\cos\theta_2 + n \cos\theta_1} \approx +0,13$$

- (c) Tulevassa ympyräpolarisaatiossa on yhtäsuuret mutta vastakkaisvaiheiset YP- ja KP-komponentit. Ne heijastuvat eri voimakkuudella, joten heijastunut aalto on elliptisesti polarisoitunut. Ellipsin pääakseli on horisontaalinen (koska kohtisuorasti polarisoitunut (vaaka)komponentti heijastuu voimakkaammin). Kätsisyys pysyy samana, sillä komponenttien heijastuskertoimet ovat erimerkkisiä.

(Kohtisuorassa heijastuksessa kätsisyys vaihtuu, koska kenttävektorin pyörimissuunta säilyy mutta etenemissuunta kääntyy. Tässä tehtävän tilanteessa kuitenkin tilanne on toinen: rajapintaa vastaan kohtisuora etenemissuunta kyllä vaihtuu, mutta koska heijastuneen aallon kiertosuunta myös vaihtuu (erimerkkisten heijastuskertoimien takia), säilyy kätsisyys samana.)

2. Tarkastele taso-aallon heijastumista vedestä. Käsitellään samaa tilannetta kuin edellisen harjoituksen vesitehtävässä; permittiivisyyden Debye-malli, mutta taajuudella $f = 16$ GHz. Löytyykö Brewsterin kulma? Siis tilanne jossa yhdensuuntaisesti polarisoitu tuleva tasoaalto ei heijastu lainkaan?

- (a) Koska veden permittiivisyys on kompleksiluku, ei Brewsterin kulmaa voi laskea tavallisesta kaavasta $\tan \theta_{Br} = n$. Approksimoi tässä kaavassa taitekerroin veden taitekertoimen reaali-osana. Laske (kompleksinen) heijastuskerroin tällä tulokulmalla. Toisin sanoen käytä heijastuskerrointa laskiessasi kompleksista permittiivisyyttä. Paljonko tehoa heijastuu?
- (b) Tutki onko (a)-kohdan kulma todellakin minimiheijastus. Eli piirrä tehoheijastus tulokulman funktiona ja etsi minimi. Kuinka pieneen heijastukseen voi päästä?

Ratkaisu:

Veden suhteellinen permittiivisyys edellisen kierroksen parametreilla taajuudella 16 GHz on noin $\epsilon_r = 42,3 - j37,5$. Sen (kompleksinen) taitekerroin on tällöin $n \approx 7,03 - j2,67$.

- (a) Jos approksimoidaan taitekerrointa reaali-osallaan, saadaan Brewsterin kulmaksi $\arctan(n) \approx 81,9^\circ$. Heijastuskertoimessa tarvitaan kosini taitekulmasta θ_2 , joka on Snellin lain mukaan

$$\cos \theta_2 = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_2} = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta_1}{n^2}}$$

Yhdensuuntaispolarisaation heijastuskerroin on tällöin

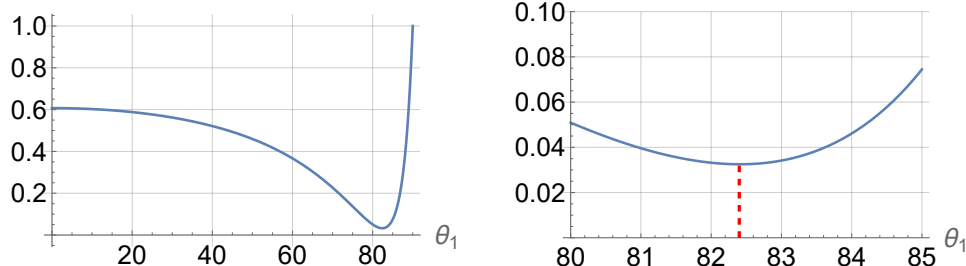
$$R_{YP} = \frac{\cos \theta_2 - n \cos \theta_1}{\cos \theta_2 + n \cos \theta_1} = \frac{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta_1}{n^2}} - n \cos \theta_1}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta_1}{n^2}} + n \cos \theta_1} = \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_1} - n^2 \cos \theta_1}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_1} + n^2 \cos \theta_1}$$

Heijastuskertoimeksi arvoilla $n = 7,03 - j2,67$ ja $\theta_1 = 81,9^\circ$ saadaan

$$R_{YP} \approx -0,033 + j0,18$$

eli tehoa heijastuu tämän itseisarvon neliön verran, noin 3,4%.

- (b) Ohessa tehoheijastus $|R_{YP}|^2$ tulokulman θ_1 funktiona.



Siitä nähdään, että (a)-kohdan arvio $81,9^\circ$ ei ole aivan minimikohdassa, vaan minimi tulee kulmalla $82,4^\circ$, jolloin tehoheijastus on hiukan pienempi kuin edellä, 3,3%.

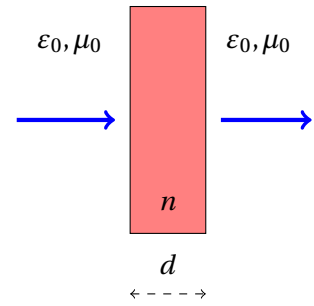
(Mutta kaiken kaikkiaan: yllättävän hyvä approksimaatio saatiin taitekertoimen reaali-osaa käyttäen, vaikka sen huomiotta jätetty imaginääriosa oli kohtalaisen suuri.)

3. Dielektrinen puolenaallon suodatin, jonka paksuus on d , päästää läpi kaiken säteilyn taajuudella ω , kun se on mitoitettu seuraavasti:

$$nk_0d = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon}d = \pi$$

missä esiintyvät parametrit ovat suodatinlevyn taitekerroin n , tyhjiön permeabiilisuus μ_0 ja levyn permittiivisyys $\epsilon = n^2\epsilon_0$.

Selvitä alkuun itsellesi, että näin on. Avuksi tangenttikaava (dynaamisen kirjan luvun 2.3.4 kaava (2.89)) ja heijastuskertoimen kaava (2.91).



Olkoon meillä tällainen suodatinlevy, jonka taitekerroin on $n = 1.5$ ja joka on mitoitettu vihreälle valolle (eli päästää kaiken sellaisen valon lävitseen, jonka (vapaan tilan) aallonpituus on $\lambda = 555$ nm).

Kuinka paljon se heijastaa (valotehoa)

- punaista valoa (aallonpituus 700 nm)
- sinistä valoa (aallonpituus 450 nm)
- Pohdi, miten Albert Edelfeltin *Ruokolahden eukkoja kirkonmäellä* muuttuisi, jos katsoisit sitä ko. suodattimen läpi. Vääristyisikö, ja jos, niin miten?



Ratkaisu:

Tangenttikaavan mukaan ilmassa (aaltoimpedanssi η_0) olevan d -paksuisen kerroksen läpi näkyvä impedanssi on

$$\eta_K = \eta \frac{\eta_0 + j\eta \tan(nk_0d)}{\eta + j\eta_0 \tan(nk_0d)}$$

jossa tässä dielektrisessä tapauksessa $\eta = \eta_0/n$, ja taitekerroin on $n = 1.5$. Vihreälle valolle $nk_0d = \pi$, joten $\eta_K = \eta_0$ ja tilanne on sovitettu, kaikki valoteho pääsee lävitse.

Tangentin argumentti on verrannollinen taajuuteen, eli kääntäen verrannollinen aallonpituuteen. Siksi aallonpituudella λ argumentti on

$$nk_0d = \pi \cdot \left(\frac{555 \text{ nm}}{\lambda} \right)$$

- (a) Punainen valo: $\lambda = 700$ nm:

$$\frac{\eta_K}{\eta_0} \approx 0,69 + j0,28 \quad \Rightarrow \quad R = \frac{\eta_K - \eta_0}{\eta_K + \eta_0} \approx -0,16 + j0,19$$

eli tehoheijastus on $|R|^2 \approx 6,0\%$.

- (b) Sininen valo puolestaan: $\lambda = 450$ nm:

$$\frac{\eta_K}{\eta_0} \approx 0,64 - j0,27 \quad \Rightarrow \quad R = \frac{\eta_K - \eta_0}{\eta_K + \eta_0} \approx -0,19 - j0,19$$

Sinisellä heijastus on hiukan verran suurempi kuin punaisella: tehoheijastus $|R|^2 \approx 7,2\%$.

- (c) Maalauksen vihreän värin osat näkyisivät luonnollisina, mutta punainen ja sininen spektrin pää himmenisivät, ehkäpä selvästikin kuvataiteen ystävänsä silmissä.

1. Hertzin dipolin säteilemät kentät johdettiin luennolla täydellisessä muodossaan, sisältäen lähi-, kauko- ja välialueen kenttien lausekkeet (dynaamisen kirjan kaavat (4.11)–(4.15)).

Sähkö- ja magneettikentät ovat kaukoalueessa samassa vaiheessa, kuten näkyy kaavoista (4.21)–(4.22). Ja lähikenttäalueessa niiden vaihe-ero on puolestaan 90 astetta (senhän huomaa kaavoista (4.17) ja (4.20), joista sähkökentässä on j -kerroin ja magneettikenttä reaalinen).

Tarkastele kenttien vaihetta etäisyyden funktiona pääsäteilysuunnassa (kohtisuorassa dipolin suuntaa vastaan, $\theta = \pi/2$).

- Piirrä kenttien vaihe-ero etäisyyden funktion (käytä normalisoitua, laadutonta etäisyyttä kr).
- Kuinka kauas pitää mennä, jotta vaihe-ero on korkeintaan yksi aste? Entä millä etäisyydellä lähikenttävaihe poikkeaa yhdellä asteella 90 asteesta?

Ratkaisu:

Kaukokenttäkomponentit pääsäteilysuunnassa $\theta = 90^\circ$ ovat

$$\mathbf{E}_\theta = j\omega\mu_0 IL \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \left(1 + \frac{1}{jkr} + \frac{1}{(jkr)^2} \right)$$

$$\mathbf{H}_\varphi = jk IL \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \left(1 + \frac{1}{jkr} \right)$$

Niiden vaiheiden ero on sulkulausekkeiden vaihekulmien erotus. Kompleksiluvun vaihekulman tangentti on imaginaariosan suhde reaaliin, joten vaihe-eroksi tulee

$$\arctan\left(\frac{-1/kr}{1}\right) - \arctan\left(\frac{-1/kr}{1 - 1/(kr)^2}\right)$$

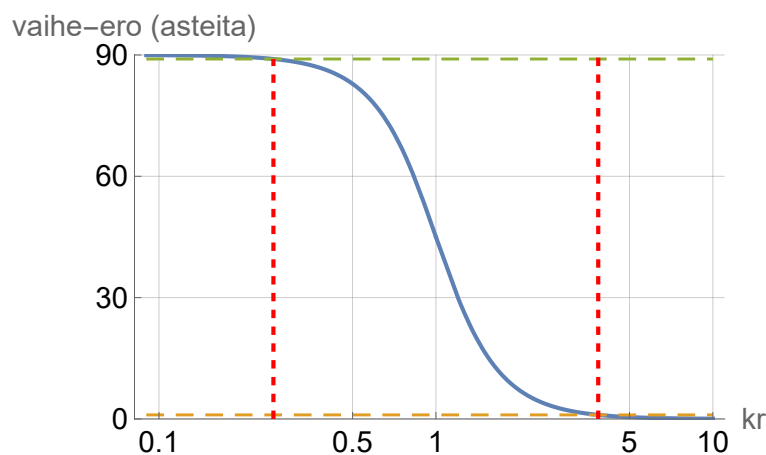
Vaihe-eron voi sieventää mukavasti, kun laskee sulkulausekkeiden suhteen:

$$\frac{1 + \frac{1}{jkr}}{1 + \frac{1}{jkr} + \frac{1}{(jkr)^2}} = \frac{\left(1 - \frac{j}{kr}\right)\left(1 + \frac{j}{kr} - \frac{1}{(kr)^2}\right)}{\left(1 - \frac{j}{kr} - \frac{1}{(kr)^2}\right)\left(1 + \frac{j}{kr} - \frac{1}{(kr)^2}\right)} = \frac{1 + \frac{j}{(kr)^3}}{\left(1 - \frac{1}{(kr)^2}\right)^2 + \frac{1}{(kr)^2}}$$

Tämän lausekkeen vaihekulma on

$$\arctan\left(\frac{1}{(kr)^3}\right)$$

- Oheisessa kuvassa piirrettynä (sininen käyrä)



(b) Kuvassa ovat myös nuo yhden asteen rajapisteet.

Sähkö- ja magneettikentän vaiheet ovat yhden asteen tarkkuudella samat, kun ylitetään raja $kr \approx 3,9$. Eli oltava vähintään $0,61\lambda$:n päässä.

Vastaavasti lähikentässä ollaan yhden asteen tarkkuudella vastavaiheessa, kun kr on pienempi kuin $0,26$. Eli se on vain noin neljä prosenttia aallonpituudesta.

2. Hertzin dipolin virtamomentti on $IL = 0,50 \text{ Am}$. Kuinka lähelle sitä voi tulla pääsäteilysuunnassa ($\theta = \pi/2$), jotta Sosiaali- ja terveysministeriön turvarajat (ks. 9. tehtäväkierros) pysyvät voimassa? Taajuus on 400 MHz.
-

Ratkaisu:

Hertzin dipolin säteilemä sähkökenttä kaukoalueessa on

$$\mathbf{E}(r, \theta) = j\omega\mu IL \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \sin\theta \mathbf{u}_\theta$$

Tämän amplitudi voimakkaimman säteilyn suunnassa on

$$E = \frac{\omega\mu IL}{4\pi r} = \eta \frac{k IL}{4\pi r}$$

Silloin säteilyn tehotiheys on (Poynting!)

$$S = \frac{E^2}{2\eta} = \eta \frac{(k IL)^2}{2(4\pi r)^2} = \eta \frac{(IL)^2}{8\lambda^2 r^2}$$

Kun tämä saa olla korkeintaan tehotiheysarvo 2 W/m^2 , saadaan minimietäisyydeksi

$$r = \frac{IL}{\lambda} \sqrt{\frac{\eta}{8S}} \approx 3,2 \text{ m}$$

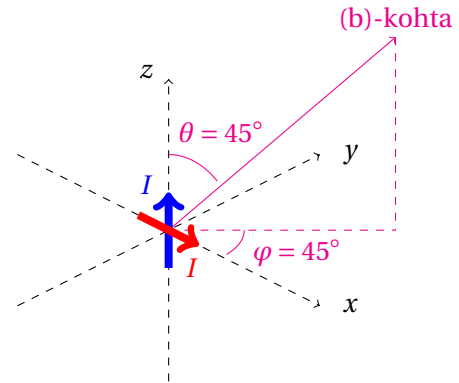
(Aaltoimpedanssi ilmassa on noin 377Ω ja taajuudella 400 MHz aallonpituus on 75 cm.)

3. Luennolla laskettiin perusteellisesti z -suuntaisen dipolin kentät. Eli kaukoalueessa sähkökentän suunta on \mathbf{u}_θ ja magneettikentän \mathbf{u}_φ ja kenttien voimakkuuden suuntariippuvuus $\sin \theta$, kun käytetään pallokoordinaatiston parametreja. Tämä on kuvan sininen dipoli.

Entäpä jos dipoli osoittaakin toiseen suuntaan, kuten kuvan punainen, x -akselin suuntainen dipoli? Dipolit ovat samassa vaiheessa ja niiden syöttövirrat ovat yhtä suuret.

- (a) Tarkastele kaukokenttää $+y$ -akselin suunnassa, siis $\mathbf{u}_r = +\mathbf{u}_y$. Siellä kokonaiskenttä on dipolien säteilemien kenttäkomponenttien summa. Mikä on tässä suunnassa aallon polarisaatio? Minkä suuntainen on sähkökenttävektori? Entäpä magneettikenttävektori?

- (b) **(Bonustehtävä:)** Tarkastele säteilysuuntaa $\theta = 45^\circ$, $\varphi = 45^\circ$. Kumman dipolin säteily on voimakkaampaa tähän suuntaan kaukokentässä? Laske myös näiden kahden dipolin säteilemien sähkökenttävektorien välinen kulma.

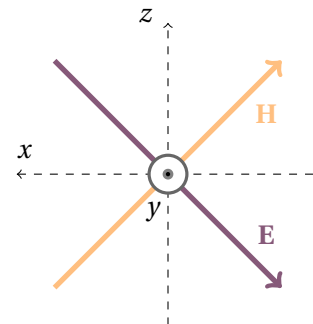


Ratkaisu:

- (a) Kun tarkastellaan dipolien säteilyä kaukoalueessa $+y$ -akselilla, se on kummankin dipolin maksimisäteilysuunnassa (eli kohtisuorassa dipolien omaa vektorisuuntaa vastaan).

Entäpä suunta? Sininen dipoli $\mathbf{u}_z IL$ tuottaa sähkökentän \mathbf{u}_θ , joka $+y$ -akselilla on $-\mathbf{u}_z$, ja punainen dipoli $\mathbf{u}_x IL$ vastaavasti tuottaa kentän suuntaan $-\mathbf{u}_x$. Tällöin niiden summa on yksikkövektorin $-(\mathbf{u}_z + \mathbf{u}_x)/\sqrt{2}$ suuntainen. Polarisaatio on lineaarinen, 45 asteen kulmassa vinosti xz -tasossa.

Sinisen dipolin magneettikenttävektori on \mathbf{u}_φ -suuntainen, eli täällä $+y$ -akselilla se on $-\mathbf{u}_x$, ja punaisen dipolin magneettikenttävektori $+\mathbf{u}_z$. Siksi magneettikentän yksikkövektori (kohtisuorassa sähkökenttää vastaan) on $(\mathbf{u}_z - \mathbf{u}_x)/\sqrt{2}$.



- (b) Mikä on kenttien suuntavektori yleisessä säteilysuunnassa?

Luennolla ja kirjassa tarkasteltu $+z$ -suunnassa värähtelevä Hertzin dipoli synnyttää kaukoalueessa magneettikentän, jonka amplitudi- ja suuntariippuvuus on $\mathbf{u}_\varphi \sin \theta$. Tämähän on

$$\mathbf{u}_z \times \mathbf{u}_r = (\mathbf{u}_r \cos \theta - \mathbf{u}_\theta \sin \theta) \times \mathbf{u}_r = \mathbf{u}_\varphi \sin \theta$$

Silloin sähkökenttä saadaan ottamalla ristitulo magneettikentästä ja etenemissuunnasta:

$$(\mathbf{u}_z \times \mathbf{u}_r) \times \mathbf{u}_r = (\sin \theta \mathbf{u}_\varphi) \times \mathbf{u}_r = \mathbf{u}_\theta \sin \theta$$

Samalla tavalla saadaan mielivaltaisen suuntaisen dipolin säteilevä sähkökenttä kaukoalueessa. Hertzin dipoli, jonka virta värähtelee \mathbf{u} -suunnassa, säteilee kaukokentässä sähkökentän, jonka polarisaatiovektori on

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{u}_r) \times \mathbf{u}_r$$

missä \mathbf{u}_r on tarkasteltavan säteilysuunnan yksikkövektori.

Tällöin $+x$ -suuntaisen dipolin sähkökenttävektori kaukoalueessa on (käytä kaavakokoelmaa)

$$\begin{aligned}(\mathbf{u}_x \times \mathbf{u}_r) \times \mathbf{u}_r &= \mathbf{u}_r (\mathbf{u}_x \cdot \mathbf{u}_r) - \mathbf{u}_x (\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_r) = \mathbf{u}_r \sin \theta \cos \varphi - \mathbf{u}_x \\ &= \mathbf{u}_r \sin \theta \cos \varphi - (\mathbf{u}_r \sin \theta \cos \varphi + \mathbf{u}_\theta \cos \theta \cos \varphi - \mathbf{u}_\varphi \sin \varphi) \\ &= -\mathbf{u}_\theta \cos \theta \cos \varphi + \mathbf{u}_\varphi \sin \varphi\end{aligned}$$

(Tästä saadaan (a)-kohdan vastaus, siis kentän polarisaatio, kun suunta on $\mathbf{u}_r = +\mathbf{u}_y$, eli $\theta = 90^\circ$, $\varphi = 90^\circ$, jolloin se on \mathbf{u}_φ , eli $-\mathbf{u}_x$.)

Mutta siis (b)-kohta. Siellä on $\theta = 45^\circ$ ja $\varphi = 45^\circ$:

Amplitudi:

Siniselle $+z$ -suuntaiselle dipolille se on

$$|\sin \theta| = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707$$

Ja punaiselle $+x$ -suuntaiselle saadaan

$$\left| -\mathbf{u}_\varphi \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \mathbf{u}_\theta \frac{1}{\sqrt{2}} \right| = \sqrt{1/4 + 1/2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,866$$

Eli punaisen dipolin säteily kaukokentässä on noin 22 prosenttia voimakkaampaa.

Kenttäkomponenttien välinen kulma:

Kahden yksikkövektorin välisen kulman kosini on yhtäsuuri kuin niiden välinen pistetulo.

Sinisen dipolin kentän yksikkövektori on

$$\mathbf{u}_\theta$$

ja punaisen

$$\frac{-\mathbf{u}_\theta \cos \theta \cos \varphi + \mathbf{u}_\varphi \sin \varphi}{\sqrt{\cos^2 \theta \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}}$$

Niiden välinen pistetulo (tapauksessa $\theta = 45^\circ$, $\varphi = 45^\circ$):

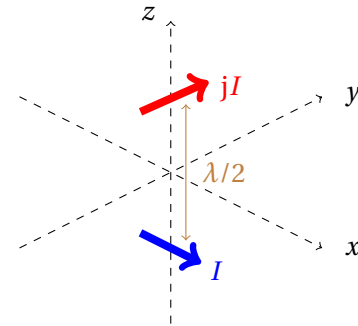
$$-\frac{\cos \theta \cos \varphi}{\sqrt{\cos^2 \theta \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

joten kenttäkomponenttien välinen kulma on $\arccos(-3^{-1/2}) \approx 2,19$ eli noin 125 astetta.

1. Kaksi dipolia muodostaa antennijoukon. Ne ovat puolen-aallon etäisyydellä toisistaan z -akselilla, toisen dipolimomentti x -akselin ja toisen y -akselin suuntainen. Niiden syöttövirrat ovat 90 asteen vaihesiirrossa: $(\mathbf{u}_x I)$ ja $(\mathbf{u}_y jI)$.

Määritä näiden dipolien yhdessä säteilemän kaukokentän polarisaatio seuraavissa kuudessa suunnassa: $\pm x$ -, $\pm y$ - ja $\pm z$ -akselin suunnissa?

Muista taas kätisyys!



Ratkaisu:

Hertzin dipoli (eikä muukaan lineaarinen dipoli) säteilee oman akselinsa suuntaan. Siksi sinisellä dipolilla on nollakohta $\pm x$ -akselin suuntiin, ja sinne säteilee vain punainen dipoli, jonka polarisaatio on lineaarinen (kentän suunta $\pm \mathbf{u}_y$). Samoin $\pm y$ -akselin suunnassa kaukokentässä punainen dipoli ei vaikuta, mutta sininen dipoli säteilee lineaarisen x -suuntaan polarisoidun sähkökentän.

Säteily $\pm z$ -akselin suuntaan vaatii hiukan enemmän pohtimista. Niihin suuntiin molemmat dipolit säteilevät maksiminsa, yhtä suuret kentät.

Tarkastellaan ensin säteilyä positiivisen z -akselin suuntaan. Sinisen dipolin säteily saapuu sinne puoli aaltoa kauempaa kuin punaisen dipolin. Siksi säteilyn sähkökenttävektorin reaali-osa on $-\mathbf{u}_x$ -suuntainen silloin kun imaginääriosa on $+\mathbf{u}_y$ -suuntainen. Ajan suhteen kompleksivektori kiertää reaali-osaasta negatiiviseen imaginääriosaan, joten kyseessä on oikeakätinen ympyräpolarisaatio.

Ja vastaavan päättelyn mukaisesti negatiiviseen z -suuntaan säteilykenttä on vasenkätisesti ympyräpolarisoitua, sen kenttä on verrannollinen kompleksivektoriin $\mathbf{u}_x - j\mathbf{u}_y$.

2. Erään antennin normalisoitu säteilykuvio (kentän amplitudin suuntariippuvuus) on pallokoordinaattiston parametreja käyttäen

$$F(\theta, \varphi) = \begin{cases} \sin \varphi \sin^3 \theta, & 0 \leq \varphi \leq \pi \\ 0 & \text{muulloin} \end{cases}$$

Määritä

- voimakkaimman säteilyn suunta,
- säteilykuvion avaruuskulma $\Omega_p = \int_{4\pi} F^2 d\Omega$,
- suuntaavuus lukuna ja desibeleinä,
- puolentehon keilanleveydet xy - ja yz -tasoissa.
- Arvioi säteilykuvion avaruuskulma Ω_p puolentehon keilanleveyksien perusteella (kuten dynaamisen kirjan sivulla 163). Kuinka suuri on virhe suhteessa tarkkaan arvoon ((b)-kohta)?

(Vihje: Integroinnissa kannattaa käyttää yhteyttä $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$.)

Ratkaisu:

- $F(\theta, \varphi) = 1$, eli maksimissaan, kun $\theta = \pi/2$ ja $\varphi = \pi/2$, siis positiivisen y -akselin suuntaan.
- Nyt on integroitava

$$\Omega_p = \int_{4\pi} F^2(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi = \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \sin^2 \varphi \sin^7 \theta d\theta d\varphi$$

Tässä φ -integrointi on helppo:

$$\int_0^{\pi} \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{\pi}{2}$$

sillä sinin neliön keskiarvo on puoli.

Kun $\sin \theta$:n seitsemättä potenssia lähtee integroimaan, sen voi kirjoittaa muotoon

$$\sin^7 \theta = (\sin^2 \theta)^3 \cdot \sin \theta = (1 - \cos^2 \theta)^3 \cdot \sin \theta = (1 - 3\cos^2 \theta + 3\cos^4 \theta - \cos^6 \theta) \cdot \sin \theta$$

joista kukin termi tuottaa suoraviivaisen integraalin:

$$\int_0^{\pi} 1 \cdot \sin \theta d\theta = \left| -\cos \theta \right|_0^{\pi} = -(-1) - (-1) = 2$$

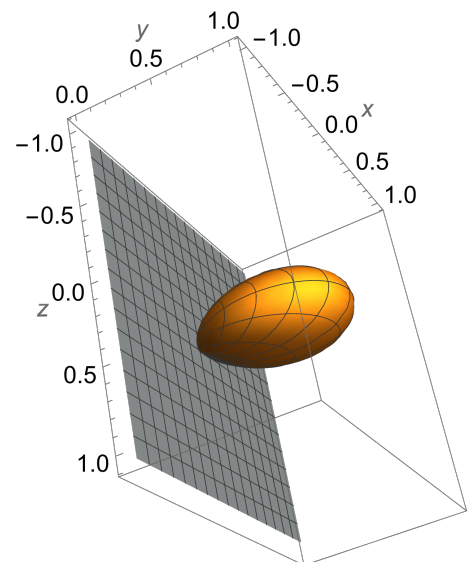
$$\int_0^{\pi} 3\cos^2 \theta \cdot \sin \theta d\theta = \left| -\cos^3 \theta \right|_0^{\pi} = 2$$

$$\int_0^{\pi} 3\cos^4 \theta \cdot \sin \theta d\theta = \left| -\frac{3}{5}\cos^5 \theta \right|_0^{\pi} = \frac{6}{5}$$

$$\int_0^{\pi} \cos^6 \theta \cdot \sin \theta d\theta = \left| -\frac{1}{7}\cos^7 \theta \right|_0^{\pi} = \frac{2}{7}$$

Tällöin tulee säteilykuvion avaruuskulmaksi

$$\Omega_p = \frac{\pi}{2} \cdot \left(2 - 2 + \frac{6}{5} - \frac{2}{7} \right) = \frac{16\pi}{35} \approx 1,44$$



(c) Suuntaavuus on

$$D = \frac{4\pi}{\Omega_p} = \frac{35}{4} = 8,25$$

ja tähän on desibeleinä $10 \lg(8,25) \approx 9,4$ dB.

(d) Keilanleveys xy -tasossa voidaan laskea tehosäteilykuvioista, kun $\theta = \pi/2$, jolloin se on $\sin^2 \varphi$. Se on puolet maksimista, eli $1/2$, kun $\varphi = \pi/4$ ja $\varphi = 3\pi/4$. Näiden välinen kulma on siis puolentehon keilanleveys: $\Delta\varphi_{3\text{dB}} = \pi/2$ (radiaania).

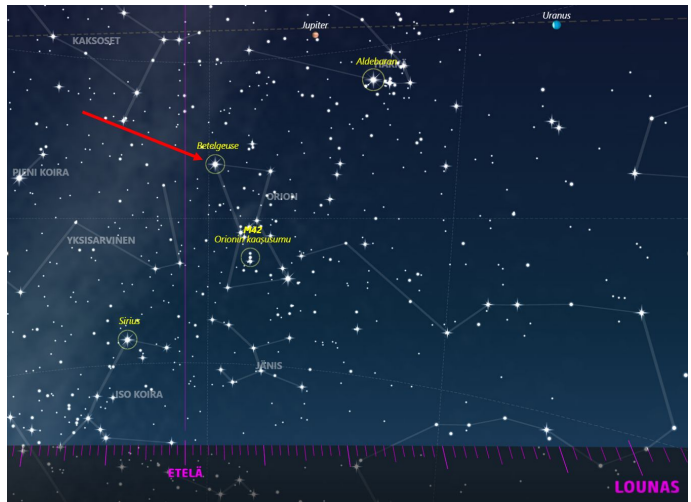
Ja yz -tasossa keilan tehotiheys on funktion $\sin^6 \theta$ mukainen. Se saa arvon $1/2$, kun $\theta = \arcsin(2^{-1/6})$, eli kulmilla $\theta \approx 1,099$ ja $2,042$. Näiden välinen keilanleveys on $\Delta\theta_{3\text{dB}} = 0,943$ (radiaania).

(e) Kapeille keiloille voidaan avaruuskulma approksimoida kohtisuorien puolentehon keilanleveyksien tulona. Tehtävän tapauksessa saadaan

$$\Omega_p \approx 0,943 \pi/2 \approx 1,48$$

Tämä on kolmen prosentin tarkkuudella sama kuin todellinen avaruuskulma!

3. Pohdi avaruusyhteyksiä. Olisiko mahdollista saada radiosignaali vastaanotetuksi Betelgeusen luona? Betelgeuse (α Orionis) on punainen jättiläistähti Orionin tähtikuviossa, jonka arvioidaan olevan noin 650 valovuoden etäisyydellä Maasta. Yritetään: käytetään vedyn 21 senttimetrin spektriviivaa 1420,4 MHz, jota on ehdotettu tähtienvälisen tietoliikenteen kanavaksi (tarkempi perustelu: G. Cocconi & Ph. Morrison: Searching for interstellar communications, *Nature*, 4690, ss. 844-846, 19 September 1959).



Yötaivaan näkymä Helsingin horisontissa 29. marraskuuta 2024 klo 02:00
www.ursa.fi/taivaalla/tahtikartta/

Oleta, että lähetyssantennin vahvistus on 60 desibeliä ja vastaanottoantennin 5 desibeliä.

- (a) Jos lähetysteho on yksi megawatti, niin kuinka suuri on vastaanotettu teho? Ilmoita vastauksesi käyttämällä etuliitettä (nano, piko, femto, atto, ...)
- (b) Jos vastaanottoherkkyys on 1 femtowattia, kuinka suuri lähetystehon pitää olla? (ja taas, ilmoita vastauksesta watteina sopivalla etuliitteellä tera, peta, eksa, tsetta, ...)

Ratkaisu:

Friisin kaavan suora sovellus. Radioyhteyden etäisyys on 650 valovuotta ($r \approx 6,15 \cdot 10^{18}$ m), aallonpituus on $\lambda \approx 0,211$ m, lähetyssantennin vahvistus on 60 dB (10^6) ja vastaanottoantennin 5 dB (3,16).

Vastaanotetun tehon suhde lähetystehoon on

$$\frac{P_v}{P_1} = G_1 G_v \left(\frac{\lambda}{4\pi r} \right)^2 \approx 2,36 \cdot 10^{-35}$$

- (a) Lähetysteho on $P_1 = 10^6$ W. Silloin vastaanotetaan $2,4 \cdot 10^{-29}$ wattia, joka on etuliitteillä 24 qW (kvektowattia) tai 0,024 rW (rontowattia).
- (b) Jos vastaanotetun tehon on oltava vähintään femtowatin verran (10^{-15} W), tarvitaan lähetysteho $4,2 \cdot 10^{19}$ W. Tämä on 42 triljoonaa wattia, 42 EW (eksawattia).

10^3	kilo	k	tuhat	10^{-3}	milli	m
10^6	mega	M	miljoona	10^{-6}	mikro	μ
10^9	giga	G	miljardi	10^{-9}	nano	n
10^{12}	tera	T	biljoona	10^{-12}	piko	p
10^{15}	peta	P		10^{-15}	femto	f
10^{18}	eksa	E	triljoona	10^{-18}	atto	a
10^{21}	tsetta	Z		10^{-21}	tsepto	z
10^{24}	jotta	Y	kvadriljoona	10^{-24}	jokto	y
10^{27}	ronna	R		10^{-27}	ronto	r
10^{30}	kvetta	Q	kvintiljoona	10^{-30}	kveкто	q

vuodesta 2022