Aalto-universitetet
Björn Ivarsson, 050-4067 832

Kurstentamen, fredag 11.04.2025, 16.30 - 19.30
Tentamen, fredag 11.04.2025, 16.30 - 19.30
Differential- och integralkalkyl 3, MS-A0309

Motivera dina svar! Att endast lämna svar ger inga poäng. I **kurstentamen** (för er som läste kursen period 4, 2025) ingår fem uppgifter från uppgift 1, 2, 3, 4, 5 och 6. Om ni gör samtliga uppgifter så räknas de fem med bäst resultat. I **tentamen** ingår uppgift 1, 2, 3, 4, 5 och 6.

Hjälpmedel: Skrivdon. Inga räknare, inga böcker och inga formelsamlingar. Det finns en formelsamling på tentamenspappret.

(1) Låt S vara delen av planet $x+y+z=1$ som ligger i första oktanten (alltså där $x \geq 0$, $y \geq 0$ och $z \geq 0$). Beräkna ytintegralen

$$\iint_S (x+z)\, dS.$$

(6p)

(2) Låt γ vara halvcirkeln med parametrisering $\gamma(t) = (2+\cos t, 1+\sin t)$ då $0 \leq t \leq \pi$. Låt $\vec{F}$ vara vektorfältet

$$\vec{F}(x,y) = (y+2x, x).$$

(a) Bestäm en potentialfunktion till $\vec{F}(x,y)$. (3p)

(b) Beräkna

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

(3p)

(3) Studera vektorfältet

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}, z\right)$$

där $x^2+y^2 \neq 0$.

(a) Skriv vektorfältet i cylindriska koordinater. (2p)

(b) Beräkna $\operatorname{div} \vec{F}$ och $\operatorname{Curl} \vec{F}$. Ni kan välja själva om ni skriver era svar i cylindriska koordinater eller kartesiska xyz-koordinater.

(4p)

(4) Låt $\vec{F}(x,y,z) = (-e^{yz}, e^{xz}, z^2)$ och

$$K = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leq z^2 \text{ och } 0 \leq z \leq 1\right\}.$$

Beräkna flödet av $\vec{F}$ ut ur kroppen K. (6p)

(5) Beräkna

$$\oint_\gamma -y^3 dx + x^3 dy$$

där γ är den positivt orienterade randkurvan till cirkelsektorn som ges av olikheterna $x^2+y^2 \leq 1$ och $0 \leq y \leq x$. (6p)

(6) Låt a och b vara reella konstanter. Studera vektorfältet

$$\vec{F}(x, y, z) = (ay + bz, az + bx, ax + by).$$

(a) Bestäm samtliga värden på konstanterna a och b så att

$$\operatorname{Curl} \vec{F} = (0, 0, 0)$$

(3p)

(b) För dessa värden på a och b beräkna $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$ där $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$. (3p)

(*Ledning:* Stokes sats gäller för slutna kurvor γ men kanske kan man använda satsen för att förenkla räkningarna i b)-delen i alla fall.)

Lycka till!

En formelsamling:

- **Greens sats:**

$$\iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA = \oint_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

- **Stokes sats:**

$$\iint_S (\operatorname{Curl} \vec{F}) \cdot \vec{N} \, dS = \oint_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

- **Gauss sats:**

$$\iiint_D (\operatorname{div} \vec{F}) \, dV = \oiint_S \vec{F} \cdot \vec{N} \, dS$$

- **Gradienten, divergensen och rotationen i ett ortogonalt högerorienterat kroklinjärt koordinatsystem** $[\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}]$:

$$\nabla f = \frac{1}{h_u} \frac{\partial f}{\partial u} \hat{u} + \frac{1}{h_v} \frac{\partial f}{\partial v} \hat{v} + \frac{1}{h_w} \frac{\partial f}{\partial w} \hat{w}$$

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w} \left(\frac{\partial}{\partial u}(F_u h_v h_w) + \frac{\partial}{\partial v}(F_v h_u h_w) + \frac{\partial}{\partial w}(F_w h_u h_v) \right)$$

$$\operatorname{Curl} \vec{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w} \begin{vmatrix} h_u \hat{u} & h_v \hat{v} & h_w \hat{w} \\ \partial/\partial u & \partial/\partial v & \partial/\partial w \\ h_u F_u & h_v F_v & h_w F_w \end{vmatrix}$$

- **Några trigonometriska värden och formler:** $\sin(\pi/6) = \cos(\pi/3) = 1/2$, $\sin(\pi/3) = \cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$, $\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$, $\sin 0 = \cos(\pi/2) = 0$, $\sin(\pi/2) = \cos 0 = 1$, $\sin \pi = 0$, $\cos \pi = -1$, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$, $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$.