

MS-A0301 Differentiaali- ja integraalilaskenta 3

Kurssitentti ja yleinen tentti 11.4.2025 klo 16.30–19.30.

Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä taulukoita. Täytä kaikki otsaketiedot kaikkiin vastauspapereihin. Tulokset julkaistaan kurssin IV/2025 MyCo-sivulla.

Kurssitentti: Viisi parasta tehtävää otetaan mukaan arvosteluun.

Yleinen tentti: Laske kaikki kuusi tehtävää.

Jokainen kurssille IV/2025 osallistunut voi halutessaan palauttaa kuusi tehtävää, jolloin arvona määräytyy paremman vaihtoehdon mukaan: ”viisi parasta koetehtävää + laskaripisteet” tai ”pelkät kuusi koetehtävää”.

1. Umpinaisen pallon

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\}$$

tiheys pienenee lineaarisesti keskipisteen arvosta $4a$ pinnan arvoon $a > 0$, eli on pallokoordinaatistossa muotoa $f(r) = a(4 - r)$, kun $0 \leq r \leq 3$. Laske pallon massa, joka tiheyden avaruusintegraali.

2. a) Tasokäyrällä C (jonka yläkaari on nimeltään Pascalin etana) on napakoordinaattiesitys $r = 1 + 2 \cos \theta$, kun $0 \leq \theta \leq 2\pi$ (vasen kuva alla). Lasketaan pinta-alaan liittyvä viivaintegraali

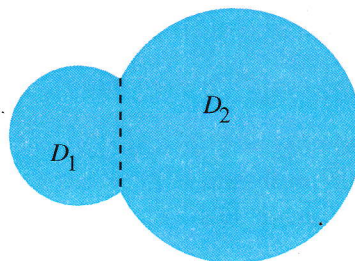
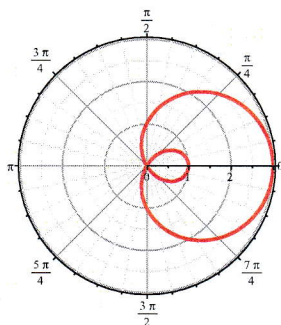
$$\oint_C x \, dy$$

parametrisoinnin määrittämään suuntaan, jossa molemmat umpinaiset osat kierretään vastapäivään. Mikä on vastauksen tulkinta pinta-alojen avulla? Integraalia ei tarvitse laskea.

b) Tasoalue $D = D_1 \cup D_2$ on jaettu kahteen projisoituvaan osaan D_1 ja D_2 oikeanpuoleisen kuvan mukaisesti. Selitä lyhyesti, miksi

$$\oint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{\partial D_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \oint_{\partial D_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

kun $\mathbf{F}$ on jatkuva kaksiulotteinen vektorikenttä ja kaikille reunakäyriille valitaan positiivinen suunta (vasemman käden säännön mukaan).



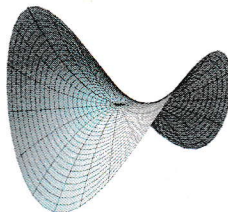
3. Laske vektorikentän $\mathbf{F}(x, y, z) = (\sin x) \mathbf{i} + (\cos y) \mathbf{j} + (\sin z) \mathbf{k}$ viivaintegraali janaa pitkin pisteestä $(\pi, \pi, 2\pi)$ origoon.

4. a) Laske vektorikentän $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + 2yz\mathbf{j} + 3xz\mathbf{k}$ lähteisyys $\nabla \cdot \mathbf{F}$ ja pyörteisyys $\nabla \times \mathbf{F}$ pisteessä $(1, 1, 1)$. (4 p.)
 b) Onko a-kohdan vektorikentällä skalaari- tai vektoripotentiaalia? (2 p.)
5. Oletetaan, että umpinainen, sileä ja itseään leikkaamaton avaruuskäyrä C sisälty pystysuoraan tasoon $T \subset \mathbf{R}^3$. Osoita (esimerkiksi soveltamalla Stokesin lausetta sopivasti valittuun pintaan), että

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

vektorikentälle $\mathbf{F}(x, y, z) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

6. Tarkastellaan satulapintaa P , jolle $z = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$ ja $x^2 + y^2 \leq 2$.
 a) Laske pinnan P pinta-ala.
 b) Laske vektorikentän $\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{k}$ vuo pinnan P "sektorinmuotoisen" osan P_+ läpi, jossa $x \geq 0$ ja $-x \leq y \leq x$. Pinnan positiivinen puoli on sen yläpuoli.



Eräitä kaavoja:

- $\nabla \cdot (\nabla f) = \Delta f$, $\nabla \times \nabla f = \mathbf{0}$, $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$
- $\nabla \cdot (f\mathbf{F}) = \nabla f \cdot \mathbf{F} + f(\nabla \cdot \mathbf{F})$, $\nabla \times (f\mathbf{F}) = \nabla f \times \mathbf{F} + f(\nabla \times \mathbf{F})$
- $\oint_{\partial D} F_1 dx + F_2 dy = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA$
- $\mathbf{N} = -f_x\mathbf{i} - f_y\mathbf{j} + \mathbf{k}$ tai $\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$, $dS = \|\mathbf{N}\| dA$
- Tällä kurssilla $\mathbf{n}$ = yksikkönormaali, jolloin $\mathbf{n} dS = \mathbf{N} dA$
- $\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \iint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$
- $\iint_P (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS = \oint_{\partial P} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{\partial P} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$
- (r, φ, θ) : $x = r \sin(\varphi) \cos(\theta)$, $y = r \sin(\varphi) \sin(\theta)$, $z = r \cos(\varphi)$, $dV = r^2 \sin(\varphi) dr d\varphi d\theta$
- $(r_\perp, \theta, z)$: $x = r_\perp \cos(\theta)$, $y = r_\perp \sin(\theta)$, $z = z$, $dV = r_\perp dr_\perp d\theta dz$
- $\sin(\pi/6) = \cos(\pi/3) = 1/2$, $\sin(\pi/3) = \cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$, $\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$,
 $\sin 0 = \cos(\pi/2) = 0$, $\sin(\pi/2) = \cos 0 = 1$, $\sin \pi = 0$, $\cos \pi = -1$, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$,
 $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$, $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$.

Huom. 1: Kurssin palautekyselyyn vastaamisesta saa yhden pisteen, joka lisätään muihin skaalattuihin pisteisiin (max = 100).

Huom. 2: Kurssitentti voi uusua V-periodin tai syyslukukauden alun tentin yhteydessä. Myös uusijoiden täytyy ilmoittautua tenttiin.