

Aalto yliopiston perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

MS-A0101 - Differentiaali- ja integraalilaskenta 1

Rogovin/Makkonen

Yleinen tentti ja kurssitentti 16.10.2024 klo 16:30–19:30.

Yleinen tentti: Laske kaikki kuusi tehtävää.

Kurssitentti: Viisi parasta tehtävää otetaan mukaan arvosteluun.

Jokainen voi yrittää kuutta tehtävää, jolloin arvosana määräytyy paremman vaihtoehdon mukaan: "viisi parasta koetettavaa + laskuharjoituspisteet" tai "pelkät kuusi koetettavaa".

Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä taulukoita!

Täytä kaikki otsaketiedot kaikkiin vastauspapereihin selkeällä käsialalla.

1. (a) Suppeneeko sarja $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k3^k}{5^{k+1}}$? (2p)

(b) Laske potenssisarjan $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{kx^k}{4^{k-1}}$ summafunktio, kun $|x| < 4$. (4p)

Vihje: Derivoi molemmin puolin yhtälö $\frac{1}{1-y} = \sum_{k=0}^{\infty} y^k$, missä $|y| < 1$. Miten tämä auttaa (b)-kohdan ratkaisussa?

2. (a) Olkoon $f: A \rightarrow B$ funktio. Määrittele seuraavat käsitteet. (3p)

5. (a) Selosta, miten funktion Maclaurinin polynomi muodostetaan. (2p)
 (b) Olkoon funktio $y(x)$ differentiaaliyhtälön

$$y''(x) - xy(x) = 0$$

sellainen ratkaisu, joka on derivoituva mielivaltaisen monta kertaa ja toteuttaa alkuehdot $y(0) = y'(0) = 1$. Määritä funktion $y(x)$ neljännen kertaluvun Maclaurinin polynomi. (4p)

Vihje: Huomaa, että funktio $f(x) := y''(x) - xy(x)$ on nollafunktio kaikilla x , ja se voidaan derivoida kuinka monta kertaa tahansa. Määritä tämän perusteella tarpeelliset derivaatat ratkaisulle $y(x)$.

6. Määritä differentiaaliyhtälön $y'' - 4y' + 4y = 8x^2 - 10$ yleinen ratkaisu. (6p)

Eräitä trigonometrinen funktioiden arvoja:

$$\left[\begin{array}{cccccccc} \alpha & -\frac{\pi}{4} & -\frac{\pi}{6} & 0 & \frac{\pi}{6} & \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{3} & \frac{\pi}{2} & \pi \\ \sin(\alpha) & -1/\sqrt{2} & -1/2 & 0 & 1/2 & 1/\sqrt{2} & \sqrt{3}/2 & 1 & 0 \\ \cos(\alpha) & 1/\sqrt{2} & \sqrt{3}/2 & 1 & \sqrt{3}/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2 & 0 & -1 \\ \tan(\alpha) & -1 & -1/\sqrt{3} & 0 & 1/\sqrt{3} & 1 & \sqrt{3} & - & 0 \end{array} \right]$$

Eräitä kaavoja:

$$\begin{aligned} D \arcsin x &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & D \arctan x &= \frac{1}{1+x^2} \\ \frac{1}{1-x} &= \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \\ \sin x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}, & \cos x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \\ \ln(1+x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k \end{aligned}$$

Huom. 1: Kurssin palautekyselyyn vastaamisesta saa yhden kurssipisteen!

Huom. 2: Kurssitentti voi uusia II-periodin tentin yhteydessä, jolloin laskuharjoituspisteet ovat vielä voimassa. **Uusintaan pitää ilmoittautua Sisun kautta.**