

5. a) Akvaariossa on likaista vettä, jota puhdistetaan johtamalla siihen puhdasta vettä, jolloin vastaava määrä täysin sekoittunutta vettä valuu pois akvaarion toisesta päästä. Epäpuhtauksien määrää akvaariossa kuvaa funktio $y = y(t)$, joka toteuttaa differentiaaliyhtälön $y' = -0,01y$, kun ajan t yksikkönä on minuutti. Millä hetkellä t_1 saavutetaan tilanne $y(t_1) = y(0)/10$? Anna vastauksen likiarvo minuutin tarkkuudella käyttämällä alla olevaa ln- taulukkoa. (3p)
- b) Ratkaise separoituva differentiaaliyhtälö $y' = 4\sqrt{y}$ alkuehdolla $y(0) = 4$ (3p).
6. Määritä differentiaaliyhtälön

$$y'' + 5y' + 6y = 0$$

ratkaisu alkuehdoilla $y(0) = 4$, $y'(0) = 0$ (6p).

Lisätieto: Eräitä trigonometristen funktioiden arvoja:

α	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π
$\sin(\alpha)$	$-1/\sqrt{2}$	$-1/2$	0	$1/2$	$1/\sqrt{2}$	$\sqrt{3}/2$	1	0	0
$\cos(\alpha)$	$1/\sqrt{2}$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{2}$	$1/2$	0	-1	1
$\tan(\alpha)$	-1	$-1/\sqrt{3}$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	0

Logaritmien ln likiarvoja:

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\ln n \approx$	0,69	1,10	1,39	1,61	1,79	1,95	2,08	2,20	2,30

Eräitä kaavoja:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$Dx^r = rx^{r-1}, \quad De^x = e^x, \quad D \ln |x| = \frac{1}{x}$$

$$D \sin x = \cos x, \quad D \cos x = -\sin x, \quad D \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad D \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \quad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k, \quad \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$$

Huom. 1: Kurssin palautekyselyyn (MyCourses) vastaamisesta saa yhden pisteen!

Huom. 2: Kurssitentti voi uusia ensi kevään tenttien yhteydessä, jolloin laskari-pisteet ovat vielä voimassa. **Myös uusijoiden täytyy ilmoittautua tenttiin.**

Käännä!

MS-A0102 Differentiaali- ja integraalilaskenta 1 (SCI)

Kurssitentti ja yleinen tentti 4.12.2025 klo 17.00–20.00.

Kurssitentti: Viisi parasta tehtävää otetaan mukaan arvosteluun.

Yleinen tentti: Laske kaikki kuusi tehtävää.

Jokainen kurssille II/2025 osallistunut voi halutessaan laskea myös kuusi tehtävää, jolloin arvosana määräytyy paremman vaihtoehdon mukaan: ”viisi parasta koetehtävää + laskaripisteet” tai ”pelkät kuusi koetehtävää”.

Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä erillisiä taulukoita. Täytä otsikkotiedot kaikkiin vastauspapereihin.

1. a) Määritä geometrisen sarjan

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{5^{k+1}}{25^{k+2}}$$

summa. (3p)

- b) Potenssisarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)x^k}{25^k}$$

suppenee eräällä välillä $] -R, R[$. Mikä on suurin mahdollinen $R > 0$? (3p)

Vihje: Suhdetesti.

2. Tarkastellaan lauseketta

$$\frac{\sin x}{x^3} - \frac{\cos x}{x^2}.$$

- a) Korvaa sin- ja cos-funktiot niiden neljännen asteen Maclaurin-polynomeilla $P_4(x)$ ja tutki tämän lausekkeen raja-arvoa, kun $x \rightarrow 0$. (3p)

- b) Laske raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x^3} - \frac{\cos x}{x^2} \right)$$

myös L'Hospitalin säännön avulla. (3p) **Vihje:** Lavenna ensin samannimiseksi.

3. Laske integraali

$$\int_0^{2\sqrt{2}} \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

esimerkiksi sijoittamalla $u = x^2 + 1$. **Vihje:** $x^3 dx = x^2 \cdot x dx$ (6p).

4. a) Määritä osamurtohajotelman

$$\frac{1}{(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3}$$

kertoimet A ja B . (3p)

- b) Laske määrätty integraali

$$\int_0^R \frac{dx}{(x+2)(x+3)}$$

ja tutki sen raja-arvoa, kun $R \rightarrow \infty$ (3p).

Käännä!