



Aalto University

Partial Differential Equations *Osittaisdifferentiaaliyhtälöt*

Exams 8.12.2025

No calculators, notes or other equipment *Ei laskimia, muistiinpanoja tai muita apuvälineitä*

Final exam (tentti)(100%): Solve all 6 problems. *Ratkaise kaikki 6 tehtävää.*

Course exam (loppukoe)(65%): Solve 5 problems. (Grading is based on 5 problems that give you most points.) *Ratkaise 5 tehtävää. (Arvostelu perustuu 5 parhaiten tehtyyn tehtävään.)*

In one of the problems, you can find formulas that might be useful in solving some other problems. *Löydät yhdestä tehtävästä kaavoja, jotka voivat olla avuksi muita tehtäviä tehdessä.*

Problem 1: Below you have a list of items. Find 6 pairs (for example, if the list contains a name of a PDE, a mathematical formula for the same PDE and its solution formula, then any two of those could form a pair). Notice that there are also some items that do not have a pair. Give your list of pairs so that it is easy to read, for example: *Etsi alla olevasta listasta 6 paria. Esimerkiksi jos listassa olisi ODY:n nimi, saman ODY:n matemaattinen kaava ja vielä sen ratkaisukaava, niin mitkä tahansa kaksi noista muodostaisivat hyvän parin. Huomaa, että listassa on myös asioita, joille ei löydy paria. Esitä lista helposti luettavassa muodossa, esimerkiksi:*

1.	Y	and	Z
2.	S	and	T
...			
6.			

You do not need to motivate your answers in this question. *Tässä tehtävässä vastauksia ei tarvitse perustella.*

- (A) Cauchy problem for the Laplace equation *Cauchyn ongelma Laplacen yhtälölle* (K) $\frac{x_3}{2\pi} \int_{\partial\mathbb{R}_+^3} \frac{g(y)}{|x-y|^3} dy, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}_+^3.$
- (B) Green's formula *Greenin kaava* (L) $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}, \quad 0 < r < \infty, \quad -\pi \leq \theta < \pi.$
- (C) Non-homogeneous heat equation *epähomogeeninen lämpöyhtälö* (M) $\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = - \int_{\Omega} u \Delta v \, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \nu} u \, dS$
- (D) Non-homogeneous wave equation *epähomogeeninen aaltoyhtälö* (N) $u_t - \Delta u = 0$ for $x \in \mathbb{R}^n, t > 0$, and $u(x, 0) = \delta_0(x)$ for $x \in \mathbb{R}^n$. $u_t - \Delta u = 0$, kun $x \in \mathbb{R}^n, t > 0$, ja $u(x, 0) = \delta_0(x)$, kun $x \in \mathbb{R}^n$.
- (E) Poisson equation *Poissonin yhtälö* (O) $\frac{1}{2}(g(x+t) + g(x-t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) \, dy.$
- (F) Wave equation in $\mathbb{R}$ *aaltoyhtälö joukossa $\mathbb{R}$* (P) $\int_0^t \frac{1}{(4\pi(t-s))^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} f(y, s) \, dy \, ds, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0.$
- (G) Wave equation in $\mathbb{R}^2$ *aaltoyhtälö joukossa $\mathbb{R}^2$* (Q) $\frac{1}{4\pi r^2} \int_{\partial B(x, r)} (th(y) + g(y) + \nabla g(y) \cdot (y-x)) \, dS(y), \quad x \in \mathbb{R}^3$
- (H) Wave equation in $\mathbb{R}^3$ *aaltoyhtälö joukossa $\mathbb{R}^3$* (I) $\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(y)}{|x-y|} \, dy, \quad x \in \mathbb{R}^3.$
- (J) $\begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, & x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n, \quad t \leq 0. \end{cases}$

Problem 2: Which of the following claims are true? Copy the following table in your answer sheet and write T for true or F for false. You do not need to motivate your answers in this question. *Mitkä seuraavista väittämistä ovat totta? Kopioi seuraava taulukko vastauspaperiin ja merkitse T jos väite on totta ja F jos se on epätosi. Tässä tehtävässä vastausten perusteluista ei saa pisteitä.*

1	2	3	4	...	12
T/F	T/F	...			

- (1) A solution to the one-dimensional wave equation has always its maximum and minimum values at the end points of the interval. *Yksiulotteisen aaltoyhtälön ratkaisu saavuttaa aina maksimi- ja minimiarvonsa välin päätepisteissä*
- (2) A solution to the one-dimensional wave equation decays to zero as $t \rightarrow \infty$. *Yksiulotteisen aaltoyhtälön ratkaisu lähestyy nollaa kun $t \rightarrow \infty$.*
- (3) Consider Laplace equation in a bounded and connected domain Ω with zero Neumann boundary condition ($\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ on $\partial\Omega$). The zero function is the only solution to this problem. *Tarkastellaan Laplacen yhtälöä rajoitetussa ja yhtenäisessä alueessa Neumannin nollareuna-arvoilla ($\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ on $\partial\Omega$). Nollafunktio on tämän ongelman ainoa ratkaisu.*
- (4) The solution to the problem in the previous question is unique up to an additive constant. *Ratkaisu edellisen kohdan ongelmaan on yksikäsitteinen vakion lisäämistä lukuunottamatta.*
- (5) The mean value formula for harmonic functions asserts that a value of a harmonic function in Ω at a point $x \in \Omega$ is equal to the average of its values over any ball $B(x, r) \subset \Omega$. *Harmonisten funktioiden keskiarvoperiaate kertoo, että harmonisen funktion arvo pisteessä $x \in \Omega$ on yhtä suuri kuin sen keskiarvo missä tahansa pallossa $B(x, r) \subset \Omega$.*
- (6) The mean value formula for harmonic functions implies that if a harmonic function in Ω is zero at some point $x \in \Omega$, then it is zero everywhere in every ball $B(x, r) \subset \Omega$. *Harmonisten funktioiden keskiarvoperiaatteesta seuraa, että jos funktio on harmoninen joukossa Ω ja se saa arvon nolla jossain pisteessä $x \in \Omega$ niin silloin se saa arvon nolla kaikkialla kaikissa palloissa $B(x, r) \subset \Omega$.*
- (7) The mean value formula for harmonic functions implies that if a nonnegative harmonic function in a connected domain Ω is zero at some point $x \in \Omega$, then it is zero everywhere in every ball $B(y, r) \subset \Omega$. *Harmonisten funktioiden keskiarvoperiaatteesta seuraa, että jos epänegatiivinen funktio on harmoninen yhtenäisessä joukossa Ω ja saa arvon nolla jossain pisteessä $x \in \Omega$, niin silloin se saa arvon nolla kaikkialla kaikissa palloissa $B(y, r) \subset \Omega$.*
- (8) The mean value formula holds also for solutions to other PDEs in addition to the Laplace equation. *Myös muut ODY:n kuin Laplacen yhtälön ratkaisut toteuttavat keskiarvoperiaatteen.*
- (9) Let us consider the one-dimensional wave equation. If the boundary/initial data vanishes for every x such that $|x| > R$ (with $R > 0$) then the solution vanishes at (x_0, t_0) if $|x_0| > R + t_0$. *Tarkastellaan yksiulotteista aaltoyhtälöä. Jos reuna-/alkudata on nolla kaikissa pisteissä x joilla $|x| > R$ (missä $R > 0$) niin tällöin ratkaisu on nollaa pisteissä (x_0, t_0) joissa pätee $|x_0| > R + t_0$.*
- (10) Let us consider the one-dimensional wave equation. If the initial speed is zero, then the solution at the point (x, t) depends only on the initial displacement at the points $x - t$ and $x + t$. *Tarkastellaan yksiulotteista aaltoyhtälöä. Jos alkunopeus on nolla, niin tällöin ratkaisun arvo pisteessä (x, t) riippuu vain alkupoikkeamasta pisteissä $x - t$ ja $x + t$.*
- (11) If $u = u(x)$ is a solution to the Laplace equation in $\mathbb{R}^n$, then $v(x, t) = u(x)$ is a solution to the heat equation in $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$. *Jos $u = u(x)$ on Laplace yhtälön ratkaisu joukossa $\mathbb{R}^n$, niin $v(x, t) = u(x)$ on lämpöyhtälön ratkaisu joukossa $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$.*

- (12) If $u = u(x, t)$ is a solution to the heat equation in $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$, then $v(x) = u(x, t_0)$ is a solution to the Laplace equation in $\mathbb{R}^n$ for every $t_0 \in (0, \infty)$. Jos $u = u(x, t)$ on lämpöyhtälön ratkaisu joukossa $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$, niin $v(x) = u(x, t_0)$ on Laplacen yhtälön ratkaisu joukossa $\mathbb{R}^n$ kaikilla $t_0 \in (0, \infty)$.

Problem 3: Assume that $u_t - \Delta u = 0$ in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

- (a) Let $a > 0$. Show that $v(x, t) = u(x, at)$ satisfies $v_t - a\Delta v = 0$.

b) Show that $v(x, t) = u(x_0 + \alpha x, t_0 + \alpha^2 t)$ satisfies $v_t - \Delta v = 0$ for every $\alpha \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ and $t_0 \in \mathbb{R}$.

c) Show that $v(x, t) = u(x, -t)$ does not satisfy $v_t - \Delta v = 0$, in general.

Oletetaan, että $u_t - \Delta u = 0$ joukossa $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

a) Olkoon $a > 0$. Näytä, että $v(x, t) = u(x, at)$ toteuttaa yhtälön $v_t - a\Delta v = 0$.

b) Näytä, että $v(x, t) = u(x_0 + \alpha x, t_0 + \alpha^2 t)$ toteuttaa yhtälön $v_t - \Delta v = 0$ kaikilla $\alpha \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ja $t_0 \in \mathbb{R}$.

c) Näytä, että $v(x, t) = u(x, -t)$ ei yleisesti toteuta yhtälöä $v_t - \Delta v = 0$.

Problem 4: Let $\Omega = (0, 1) \times (0, 1) \subset \mathbb{R}^2$ and $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Let us consider the Dirichlet problem for the Laplace equation $\Delta u = 0$ in Ω with boundary values $u(x, 0) = 0$, $u(x, 1) = f(x)$, when $0 < x < 1$, and $u(0, y) = u(1, y) = 0$, when $0 < y < 1$.

a) Reduce the problem to two ODEs by using separation of variables.

b) Solve the separated equations to find special solutions.

c) Let $f = \sin(3\pi x)$. Find the explicit solution u .
(Hint: You may use Fourier techniques, but you do not need to.)

Olkoon $\Omega = (0, 1) \times (0, 1) \subset \mathbb{R}^2$ ja $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Tarkastellaan Dirichlet'n reuna-arvo-ongelmaa Laplacen yhtälölle $\Delta u = 0$ joukossa Ω reuna-arvoilla $u(x, 0) = 0$, $u(x, 1) = f(x)$, kun $0 < x < 1$, ja $u(0, y) = u(1, y) = 0$, kun $0 < y < 1$.

a) Muunna ongelma kahdeksi differentiaaliyhtälöksi käyttämällä muuttujien erottelua.

b) Ratkaise erotellut yhtälöt löytääksesi erityisratkaisut.

c) Olkoon $f = \sin(3\pi x)$. Ratkaise u eksplisiittisesti tässä tilanteessa.
(Vihje: Saat käyttää Fourier-tekniikoita, mutta sinun ei tarvitse.)

Problem 5: Give solution formulas to the problems below in terms of the fundamental solution of the heat equation Φ and the data f and g . It is enough to give the explicit formulas without any proofs. Esitä seuraavien ongelmien ratkaisukaavat muodossa, jossa esiintyy lämpöyhtälön fundamentaaliratkaisu Φ ja funktiot f ja g .

a) The Cauchy problem

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = g(x) & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

where $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Cauchyn ongelma.

b) The nonhomogeneous Cauchy problem with zero boundary values

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

where $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$. Epähomogeeninen Cauchyn ongelma nollareuna-arvoilla.

c) The nonhomogeneous Cauchy problem with general boundary values

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = g(x) & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

where $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$ and $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Epähomogeeninen Cauchyn ongelma yleisillä reuna-arvoilla.

Problem 6: Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be an open and bounded set, and $T > 0$. Let us consider the heat equation in $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$.

- What is the parabolic boundary of Ω_T ? (Explain clearly, which points belong to it.)
- What is the (weak) maximum principle for the heat equation in Ω_T ?
- State a uniqueness result for the non-homogeneous heat equation in Ω_T .
- Prove the uniqueness result using the maximum principle.

Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja rajoitettu joukko, ja $T > 0$. Tarkastellaan lämpöyhtälöä joukossa $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$.

- Mikä on joukon Ω_T parabolinen reuna? (Ilmaise selvästi, mitkä pisteet kuuluvat kyseiseen joukkoon.)*
- Mikä on lämpöyhtälön (heikko) maksimiperiaate joukossa Ω_T ?*
- Muotoile yksikäsitteisyystulos epähomogeeniselle lämpöyhtälölle joukossa Ω_T .*
- Todista yksikäsitteisyystulos käyttäen maksimiperiaatetta.*