

PHYS-C0210 Kvanttimekaniikka 1, tentti 1.12.2025

Jos teet **kurssitenttin**, jolloin arvosana määräytyy tentin, laskuharjoitusten sekä luentojen esitehtävien perusteella, voit vapaasti valita tehtävistä. Viisi pisteiltään parasta tehtävää lasketaan arvosanaan.

Jos teet **lopputentin**, kirjoita ensimmäiselle vastauspaperillesi **LOPPUTENTTI**. Lopputentin arvosana määräytyy pelkästään tentin perusteella ja kaikkien tehtävien pisteet lasketaan mukaan arvosanaan. *Oletusarvona tentti arvostellaan kurssitenttinä.*

- Oheiselta lisäpaperilta löytyy spin-1/2 systeemin operaattoreita ja tiloja z -kannassa. Vastaa seuraaviin kysymyksiin numero/kirjain yhdistelmillä. Huomioi, että oikeita vastauksia voi olla useita. Vastauksia ei tarvitse perustella.
 - Mitkä tilat ovat a. operaattorin ominaistiloja? (1p)
 - Mitkä tilat ovat ortogonaalisia? (1p)
 - Minkä operaattorin ominaistila on tila 2?(1p)
 - Minkä operaattori-tila kombinaation odotusarvo on nolla? (1p)
 - Operaattorin b. operoidessa johonkin tilaan 1-8, minkä operaation tulos on nolla? (1p)
 - Operaattori f. operoi tilaan 5. Kirjoita tästä seuraava yhtälö matriisinotaatiossa. (1p)
- Spin 1-systeemille spin-operaattorit S_x , S_y ja S_z ovat matriisinotaatiossa (z -kannassa):

$$S_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad S_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad S_z = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Määritä kommutaattori $[S_x, S_y]$. Miten saamasi tulos vaikuttaa spinin x - ja y -komponenttien kokeelliseen määrittämiseen? (2p)

Spin 1-hiukkanen on tilassa $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{30}}(|1\rangle + 2|0\rangle + 5i|-1\rangle)$, missä $|1\rangle$, $|0\rangle$ ja $|-1\rangle$ ovat z -kannan ominaistiloja.

- Mitkä ovat mahdolliset mittaustulokset spinin z -komponentille? (1p)
- Määritä odotusarvo spinin x -komponentille. (3p)

- Hiukkanen, jonka massa on m ja energia on $E < V_0$, on sidottu seuraavaan potentiaaliukuoppaan:

$$\begin{aligned} V(x) &= \infty, & x < 0 \\ V(x) &= 0, & 0 < x < L \\ V(x) &= V_0, & x > L \end{aligned}$$

- Mitä reunoehdot sinun pitää ottaa huomioon, kun lähdet ratkaisemaan energian ominaisarvoyhtälöä? (2p)
- Mitä funktionaalista muotoa hiukkasen aaltofunktio on alueissa (i) $x < 0$, (ii) $0 < x < L$ ja (iii) $x > L$? Perustele vastauksesi. (2p)
- Hahmottele perustilan aaltofunktio potentiaaliukuopassa (sinun ei tarvitse johtaa aaltofunktiota). Miten kvanttimekaaninen tulos perustilalle (todennäköisyys tiheys ja energian ominaisarvo) eroavat klassisesta tuloksesta? (2p)

4. Tarkastele sitoutumatonta hiukkasta, jonka aaltofunktio paikka-avaruudessa on $\psi(x) = A \sin(p_0 x / \hbar)$, p_0 on liikemäärä.
- (a) Onko hiukkasen aaltofunktio liikemäärän ominaistila? Perustele. (2p)
- (b) Osoita että hiukkasen liikemäärän odotusarvo on nolla. (2p)
- (c) Miten määrittäisit hiukkasen liikemäärä-avaruuden aaltofunktion? (Ei tarvitse laskea loppuun vaan kertoa mistä laskusta tuloksen saisi.) (2p)

Vinkki: Sinifunktion muodosto $\sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$ voi olla hyötyä...

5. Kvanttimekaaniselle harmoniselle värähtelijäpotentiaalille nosto- ($a^\dagger$), lasku- (a) ja Hamilton operaattori (H) määritellään seuraavasti:

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{x} + i \frac{\hat{p}}{m\omega} \right), \quad a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{x} - i \frac{\hat{p}}{m\omega} \right), \quad H = \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right)$$

Hiukkanen harmonisessa värähtelijäpotentiaalissa on aluksi tilassa

$$|\psi(t=0)\rangle = \frac{1}{3} [|0\rangle + 2|1\rangle + 2|2\rangle].$$

- (a) Määritä tilan aikakehitys $|\psi(t)\rangle$. (1p)
- (b) Riippuuko energian odotusarvo ajasta? Mikäli riippuu, perustele fysikaalisesti miksi ja määritä ajasta riippuva odotusarvo. Mikäli ei riipu, perustele fysikaalisesti miksi ja määritä ajasta riippumaton odotusarvo. (2p)
- (c) Riippuuko liikemäärän odotusarvo ajasta? Mikäli riippuu, perustele fysikaalisesti miksi ja määritä ajasta riippuva odotusarvo. Mikäli ei riipu, perustele fysikaalisesti miksi ja määritä ajasta riippumaton odotusarvo. (3p)

Vinkki: $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$, $a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$, $a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$.

6. (a) Systeemin Hamilton operaattori on muotoa $H_0 + H'$, missä H' on pieni häiriö ja H_0 on häiriöttömän systeemin Hamilton operaattori. Miten laskisit häiriöteorian avulla hiukkasen perustilan ψ_1 energian häirityssä tapauksessa ensimmäiseen kertalukuun asti? Anna vastauksesi matriisielementtien avulla ja kiinnitä huomiota siihen että merkintätapasi on ymmärrettävä. (2p)
- (b) Varattu hiukkanen on sidottuna harmoniseen värähtelijäpotentiaaliin $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$. Systeemiin vaikutetaan pienellä sähkökentällä E niin että potentiaalienergia muuttuu $H' = -qEx$. Laske häiriöteorian avulla ensimmäisen ja toisen kertaluvun korjaukset hiukkasen perustilan energiaan (4p).

Vinkki: Tässä kannattaa huomata, että häiriö on pariton funktio, ja että häiriöttömän harmonisen värähtelijän energian ominaistilat ovat joko parillisia tai parittomia funktioita, eli niiden neliöt ovat aina parillisia. Tehtävän 5 nosto- ja laskuoperaattoreista voi myös olla hyötyä. Yleisessä tapauksessa korjaukset ovat:

$$E_n^{(1)} = \langle n^{(0)} | H' | n^{(0)} \rangle \quad E_n^{(2)} = \sum_{m \neq n} \frac{|\langle n^{(0)} | H' | m^{(0)} \rangle|^2}{(E_n^{(0)} - E_m^{(0)})}$$

Merkitse nimesi, opiskelijanumerosi, koulutusohjelmasi, kurssikoodi ja kokeen päivämäärä jokaiseen suorituspaperiisi.

Tenttiin saa tuoda rajattomasti KÄSINKIRJOITETTUA muistiinpanoja.

Tehtävä 1

Operaattoreita:

a. $|+\rangle\langle+| + |-\rangle\langle-|$

b. $|-\rangle\langle-|$

c. $\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

d. $\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

e. $\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

f. $\frac{3\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Tiloja:

1. $\frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle - i|-\rangle)$

2. $\frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle + i|-\rangle)$

3. $|+\rangle$

4. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

5. $\frac{3}{\sqrt{34}}|+\rangle + i\frac{5}{\sqrt{34}}|-\rangle$

6. $\frac{5}{\sqrt{34}}|+\rangle - i\frac{3}{\sqrt{34}}|-\rangle$

7. $\frac{3}{\sqrt{34}}|+\rangle - \frac{5}{\sqrt{34}}|-\rangle$

8. $\frac{3}{\sqrt{34}}|+\rangle - i\frac{5}{\sqrt{34}}|-\rangle$

Tehtävät 5 ja 6: Harmonisen värähtelijän aaltofunktiot

$$\varphi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-m\omega x^2/2\hbar}$$

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \left[\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x - \frac{\hbar}{m\omega} \frac{d}{dx} \right) \right]^n \varphi_0(x)$$

Paikka- ja liikemäärä-operaattori nosto- ja lasku-operaattorien avulla

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a^\dagger + a)$$

$$\hat{p} = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} (a^\dagger - a)$$