

## T-61.3010 Digitaalinen signaalinkäsittely ja suodatus

1. välikoe, la 11.3.2006 klo 10-13. Salit A-M.

1. vK on oikeus tehdä vain kerran joko 7.3. tai 11.3.

Välikokeessa ei saa olla mitään omia laskimia eikä taulukkokirjoja. Välikokeessa jaetaan kurssin taukkomoniste sekä palautuslomake tehtävää 1 varten.

Kaikki konseptit palautettava, suttupaperit erikseen sekä tehtävästä 1 palautetaan erillinen A4-lomake. Tehtäväpaperin ja taulukkomonisteen voi pitää.

Aloita uusi tehtävä uudelta sivulta. Kirjoita laskuissa käytetyt välivaiheet mukaan.

- 1) (14 x 1p, max 12 p) Monivalinta. Väittämässä on 1-4 oikeaa vastausta, mutta valitse yksi ja vain yksi. Täytä erillisille lomakkeelle värittämällä koko ruutu.

Oikea valinta +1 P, väärä valinta -0.5 P, ei valintaa 0 P. Perusteluja ei tarvita. Vastaa niihin moneen kuin haluat. Tehtävän maksimipistemääriä on 12 ja minimimääriä 0.

1.1 Matlab-harjoituksissa tutkittiin ihmisen pubetta ja erityisesti lyhyttä kohtea vokaaliäänteestä /i/, joita tässä merkitään  $x(t)$ .

- (A) Todettiin, että  $x(t)$  on käytännöllisesti katsoen jaksollinen  $x(t) \approx x(t+T)$   
(B) Todettiin, että  $x(t)$  on matematiisesti  $x(t) = x(t+T)$  jaksollinen  
(C) Signaali  $x(t)$  tuottaa spektrin, jossa on piikkejä "perustajaudeita" (n. 200 Hz) ja sen harmonisten kohdalla.  
(D) Signaali  $x(t)$  tuottaa spektrin, joka on kolmion muotoinen

1.2 Kahden pisteen liikkuva keskiarvoistava suodin (two-point moving average):

- (A) impulssivaste on  $h[n] = 0.5\delta[n] - 0.5\delta[n-1]$   
(B) siirtofunktio  $H(z) = 0.5(1+z^{-1})$   
(C) vahvistaa signaalin nopeita muutoksia  
(D) differenssiyhälö on  $y[n] = \frac{x[n]+x[n-1]}{2}$

1.3 Solutimen impulssivaste on  $h[n] = (-0.5)^{n-2}\mu[-n+2]$ :

- (A) suodin on stabili  
(B) suodin on FIR  
(C) suodin ei ole kausaalinen  
(D) suotimen siirtofunktiossa  $H(z)$  suppenemisalue (region of convergence, ROC) on  $|z| < 0.5$

1.4 Tutkitaan sekoitusta  $x[n] = \cos((\pi/8)n) - \sin((\pi/4)n) + 2 \cos((\pi/3)n - \pi/4)$ . Mitä voidaan sanoa sekoitusten  $x[n]$  jaksollisuudesta?

- (A) Perusjakso  $N_0$  ei ole olemassa

- (B) Perusjakso on  $N_0 = 96$

- (C) Perusjakso on  $N_0 = 48$

- (D) Perusjakso on  $N_0 = 16$

1.5 Tutkitaan signaalia  $x(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)$ , jossa osasignaalien perusjaksoit ovat  $T_1 = 8$ ,  $T_2 = 10$  ja  $T_3 = 20$ . Mitä voidaan sanoa signaalin  $x(t)$  jaksollisuudesta?

- (A) Perusjakso  $T_0$  riippuu näytteenottotapaajuudesta  
(B) Perusjakso  $T_0 = 4$   
(C) Osasignaalien perustajaajuudet  $f_1$ ,  $f_2$  ja  $f_3$  voidaan lausua signaalilin  $x(t)$  perustaa, joiden  $f_0$  monikertoina  
(D) Signaali on jaksollinen jaksolla  $T = 100$

1.6 Kuvan 2(a) järjestelmän impulssivasteen  $h[n]$  konvoluutio sekvenssin  $x[n] = 0.5\delta[n] - 0.5\delta[n-1]$  kanssa

- (A) tuottaa äärellisen pitkän ulostulosekvenssin
- (B) ei voida laskea, koska suodin ei ole kausalinen
- (C) suotimen yksikköaskelvaste menee nollaan askeleella  $n = 1$
- (D) summa  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |y[n]|$ , jossa  $y[n]$  on ulostulosekvensi, suppenee ja on äärellinen

1.7 Lasketaan lineaarinen konvoluutio  $y[n] = h[n] \otimes x[n]$ . Määritellään  $w[n]$  utentana konvoluutioon:  $w[n] = h[n - N_1] \otimes x[n - N_2]$ .

- (A)  $w[n] = y[n]$
- (B)  $w[n] = (N_1 \cdot N_2) y[n - (N_1 + N_2 - 1)]$
- (C)  $W(e^{j\omega}) = e^{j(N_1+N_2)\omega} Y(e^{j\omega})$
- (D)  $W(e^{j\omega}) = e^{j(-N_1-N_2)\omega} Y(e^{j\omega})$

1.8 Tutkitaan suodinta  $H(z) = 1 - 0.5z^{-8}$ .

- (A) Suotimen amplitudivaste on kuvassa 1(a)
- (B) Suotimen napanollakuvio on kuvassa 1(d)
- (C) Suodin on toisen asteen FIR
- (D) Impulssivasteen  $h[n]$  pituuus on kahdeksan

1.9 Siirtofunktio  $H(z) = [1 - 0.3z^{-1} + 0.2z^{-2}]/[1 + 0.9z^{-2}]$ .

- (A) Suotimen vaihevaste on epälineaarin
- (B) Lohkokaaviositys on kuvassa 2(b)
- (C) Impulssivaste on  $h[n] = 0.9^n \mu[n] - 0.3 \cdot 0.9^{n-1} \mu[n-1] + 0.2 \cdot 0.9^{n-2} \mu[n-2]$
- (D) Suotimen amplitudivaste on kuvassa 1(b)

1.10 Reaalisen sekvenssin  $x[n]$

- (A) diskreettialkainen Fourier-muunnos on jaksollinen  $\pi$ :n välein
- (B) diskreettiaikaisen Fourier-muunnoksen itseisarvo on pariton funktilo
- (C) diskreettiaikaisen Fourier-muunnoksen vaihekulma on parillinen funktilo
- (D) diskreettiaikainen Fourier-muunnos voi olla myös reaaliarvoinen

1.11 Suotimen  $H(z) = [1 - 0.2z^{-1}]/[1 + 0.6z^{-1} + 0.05z^{-2}]$ , suppenemisalue ROC  $|z| > 0.5$ , kaanteismuunnos  $h[n]$  on

- (A)  $h[n] = 0.6^n \mu[n] - 0.2 \cdot 0.05^{n-1} \mu[n-1]$
- (B)  $h[n] = 1.75 \cdot (-0.5)^n \mu[n] - 0.75 \cdot (-0.1)^n \mu[n]$
- (C)  $h[n] = 0.5 \cdot (-0.3 + 0.2j)^n \mu[n] + 0.5z^{-1} \cdot (-0.3 - 0.2j)^{n-1} \mu[n-1]$
- (D)  $h[n] = 1.25 \cdot 0.5^n \mu[n] - 0.25 \cdot 0.1^n \mu[n]$

1.12 Kuvaan 1(c) vastaava napanollakuvio

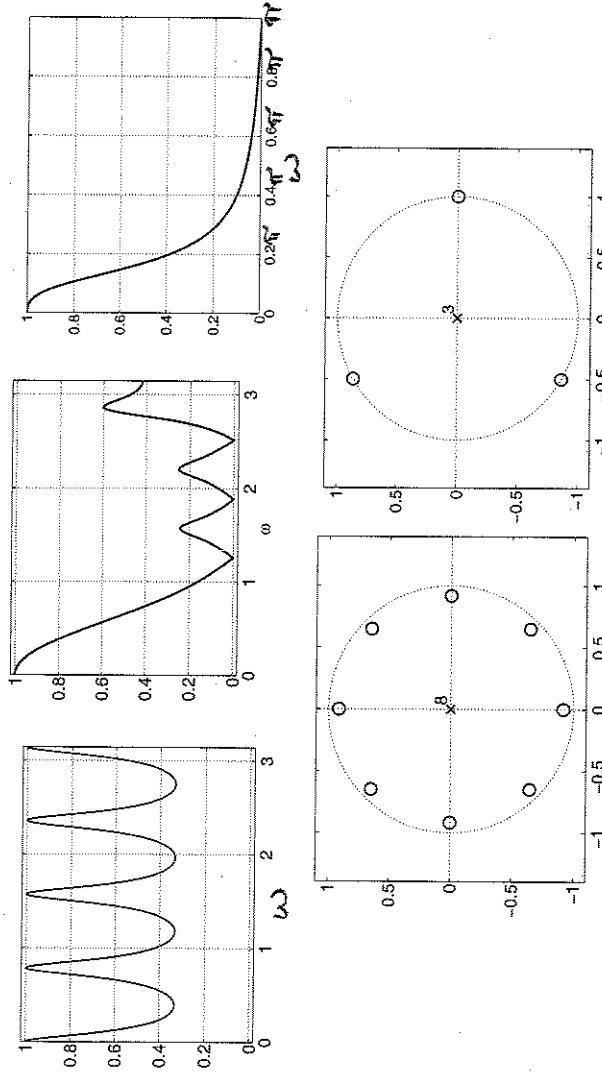
- (A) on kuvassa 1(e)
- (B) sisältää navan kohdassa  $z = 1$
- (C) sisältää nollan kohdassa  $z = -1$
- (D) sisältää nollan kohdassa  $\omega = \pi/2$

1.13 Olkoon LTI-järjestelmän impulssivaste  $h[n] = (-1)^{n-2} \mu[n+2]$  ja syöte  $x[n] = \delta[n+4] - 3\delta[n+3] + 2\delta[n+2]$ . Lasketaan ulostulo  $y[n] = h[n] \otimes x[n]$ .

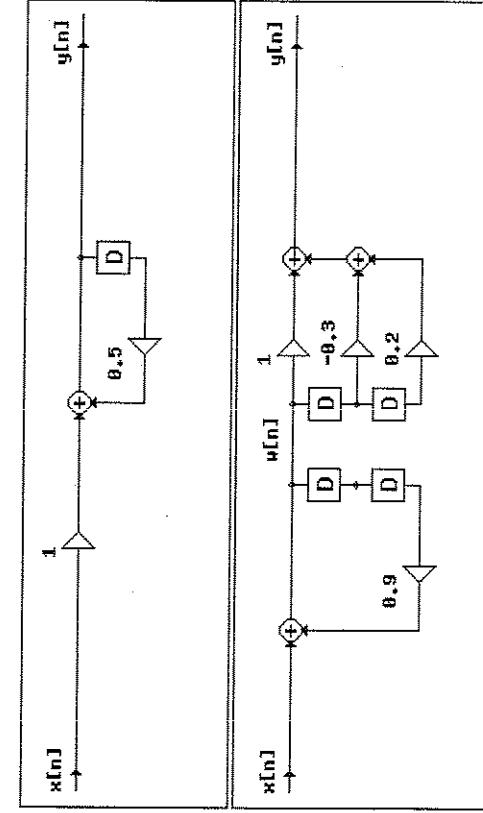
- (A)  $y[2006] = -6$
- (B)  $y[2006] = 0$
- (C)  $y[2006] = 6$
- (D)  $y[2006] = \delta[n-2002] - 3\delta[n-2003] + 2\delta[n-2004]$

1.14 Kahden LTI-järjestelmän  $h_1$  ja  $h_2$  rinnankytkennessä

- (A) koko järjestelmän  $h$  napanollakuvio saadaan laskemalla navat ja nollat erikseen molemmista osajärjestelmistä ja piirtämällä ne samaan napanollakuviioon
- (B) koko järjestelmän  $h$  impulssivaste saadaan summaamalla osajärjestelmien impulssivasteet yhteen
- (C) koko järjestelmän  $h$  impulssivaste saadaan kertomalla osajärjestelmien impulssivasteet toistensa kanssa
- (D) koko järjestelmän  $h$  impulssivaste saadaan konvoluimalla osajärjestelmien impulssivasteet toistensa kanssa



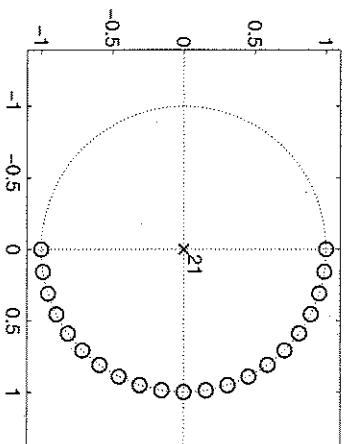
Kuva 1: Monivalintatehtävän kuvia, yläriivi (a), (b), (c), alariivi: (d), (e).



Kuva 2: Monivalintatehtävän kuvia (a), (b).

- 2) (6 p) Analoginen signaali  $x(t) = \sum_i A_i \cos(2\pi f_i t + \theta_i)$  koostuu viidestä taajuuskomponentista  $\{f_1 = 400 \text{ Hz}, A_1 = 2, \theta_1 = 0.6\}$ ,  $\{f_2 = 600 \text{ Hz}, A_2 = 7, \theta_2 = 0.1\}$ ,  $\{f_3 = 5400 \text{ Hz}, A_3 = 3, \theta_3 = 0.3\}$ ,  $\{f_4 = 9200 \text{ Hz}, A_4 = 10, \theta_4 = 0.01\}$  ja  $\{f_5 = 10200 \text{ Hz}, A_5 = 5, \theta_5 = 0.0\}$ .

- a) Signaali on jaksollinen. Mikä on sen perustajaajaus  $f_0$ ?  
 b) Hahmottele signaalin  $x(t)$  spektri  $|X(j\Omega)|$  välillä  $f \in [0 \dots 20] \text{ kHz}$ .  
 c) Signaali näytteistetään näytteenottotauajauudella  $f_s = 10 \text{ kHz}$ . Hahmottele näytteistetyn sekvenssin  $x[n]$  spektri  $|X(e^{j\omega})|$ .  
 d) Sekvenssi  $x[n]$  suodatetaan suotimella, jonka napanollakuvio on kuvan 3 mukainen. Tämän jälkeen suodatettu sekvenssi  $y[n]$  palautetaan (idealisesti) jatkuva-aikaiseksi  $y_r(t)$ . Hahmottele spektri  $|Y_r(j\Omega)|$  välillä  $f \in [0 \dots 20] \text{ kHz}$ .

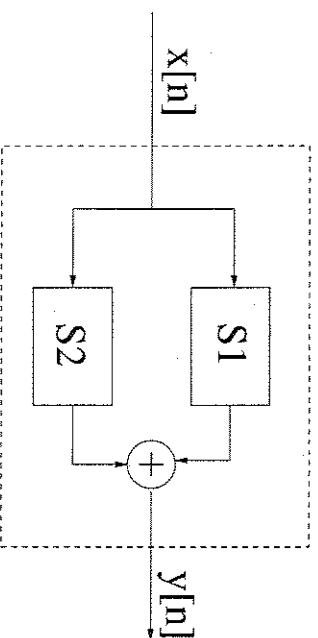


Kuva 3: Suotimen napanollakuvio.

- 3) (6 p) Tutkitaan stabiilista ja kausaallista diskreettiaikaista LTI-järjestelmää  $S_1$ , jonka nollat  $z_i$  ja navat  $p_i$  sijaitsevat kohdissa

$$\begin{array}{ll} \text{nollat:} & z_1 = 1, \quad z_2 = 1 \\ \text{navat:} & p_1 = 0.18 \end{array}$$

Aseta kuvaan 4 mukaisesti LTI-FIR-suodin  $S_2$  rinnan  $S_1$ :n kanssa niin, että kokonaisjärjestelmä  $S$  on kausaali ja toisen asteen kaistanestosuodin, jonka minimi on noin kolmatta  $\omega \approx \pi/2$  ja jonka maksimi on skaalattu ykköseksi. Miltkä ovat  $S_2$ :n ja  $S$ :n siirtofunktiot? Esitä selkeät välinvaiheet.



Kuva 4: LTI-alijärjestelmien  $S_1$  ja  $S_2$  muodostama suodin  $S$ .

## T-61.3010 DSP Taulukkomoniiste, 1.vk, K2006 T-61.3010 DSP Table of formulas, 1st MTE, spring 2006

**Disclaimer!** Notations, e.g.  $\omega$  or  $\Omega$ , may vary from book to book, or from exam paper to other.

**Even and odd functions:**

$$\mathcal{E}_{even}\{x(t)\} = 0.5 \cdot [x(t) + x(-t)]$$

$$\mathcal{O}_{odd}\{x(t)\} = 0.5 \cdot [x(t) - x(-t)]$$

**Roots of second-order polynomial:**

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/(2a)$$

**Complex numbers:**

$$i \equiv j = \sqrt{-1} = -\frac{1}{j}$$

$$z = x + iy = r e^{j\theta}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \arctan(y/x)$$

$$x = r \cos(\theta), y = r \sin(\theta)$$

$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j \sin(\theta)$$

$$\sqrt{z} = \sqrt{r} e^{j\theta} = |\sqrt{r}| e^{j(\theta+2\pi k)/N}, k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

**Trigonometric functions:**

| $\sin(\theta)$ | $\sin(\pi\theta)/( \pi\theta)$ | $\sin(\theta)/\theta \rightarrow 1$ , when $\theta \rightarrow 0$ | $\cos(\theta) = 0.5e^{j\theta} + 0.5e^{-j\theta}$ | $\sin(\theta) = 0.5je^{-j\theta} - 0.5je^{j\theta}$ | $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$ |
|----------------|--------------------------------|---|---|---|---------------------------------------|
| $\theta$       | $\pi/2$                        | $3\pi/4$  | $\pi/2$   | $\pi/2$   | $\pi/4$                               |
| $\sin(\theta)$ | 0                              | $\sqrt{3}/2$  | $\sqrt{2}/2$                                      | 0   | $\sqrt{3}/2$                          |
| $\cos(\theta)$ | 1                              | $\sqrt{2}/2$  | $\sqrt{2}/2$                                      | -1  | 0.5                                   |
| $\sin(\theta)$ | 0                              | $-\sqrt{2}/2$   | $-\sqrt{2}/2$                                     | -1  | -1                                    |
| $\cos(\theta)$ | 1                              | 0   | 0   | 0   | 0                                     |

$$\pi \approx 3.1416, \sqrt{3}/2 \approx 0.8660, \sqrt{2}/2 \approx 0.7071$$

**Geometric series:**

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}, |a| < 1$$

$$\sum_{n=0}^N a^n = \frac{1-a^{N+1}}{1-a}, |a| < 1$$

**Continuous-time unit step and unit impulse functions:**

$$\mu(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

$$\delta_\Delta(t) = \frac{d}{dt} \mu_\Delta(t), \quad \delta(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \delta_\Delta(t).$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

In DSP notation  $2\pi\delta(t)$  is computed  $2\pi \int \delta(t) \cdot 1 dt = 2\pi$ , when  $t = 0$ , and  $= 0$  elsewhere.

**Discrete-time unit impulse and unit step functions:**

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

$$\mu[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

**Convolution**

Convolution is commutative, associative and distributive.

$$y(t) = h(t) \otimes x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau) d\tau$$

$$y[n] = h[n] \otimes x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k]$$

**Correlation:**

$$r_{xy}[l] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]y[n-l] = x[l] \otimes y[-l]$$

$$r_{xx}[l] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]x[n-l]$$

Mean and variance of random signal:

$$m_X = \mathbb{E}[X] = \int xp_X(x)dx$$

$$\sigma_X^2 = \int (x - m_X)^2 p_X(x)dx = \mathbb{E}[X^2] - m_X^2$$

Frequencies, angular frequencies, periods:

Here  $f_s$  is sampling frequency.

Frequency

$$f, [f] = \text{Hz} = 1/\text{s}$$

Angular frequency

$$\Omega = 2\pi f = 2\pi/T, [\Omega] = \text{rad/s}$$

Normalized angular frequency

$$\omega = 2\pi\Omega/\Omega_s = 2\pi f/f_s, [\omega] = \text{rad/sample}$$

Normalized frequency in Matlab

$$f_{MATLAB} = 2f/f_s, [f_{MATLAB}] = 1/\text{sample}$$

**Integral transform properties**

Here all integral transforms share some basic properties.

Examples given with CTFIT,  $x[n] \leftrightarrow X(e^{j\omega})$ ,  $x_1[n] \leftrightarrow X_1(e^{j\omega})$ , and  $x_2[n] \leftrightarrow X_2(e^{j\omega})$  are time-domain signals with corresponding transform-domain spectra,  $a$  and  $b$  are constants.

**Linearity.** All transforms are linear.

$$ax_1[n] + bx_2[n] \leftrightarrow aX_1(e^{j\omega}) + bX_2(e^{j\omega})$$

**Time-shifting.** There is a kernel term in transform, e.g.,  $x[n-k] \leftrightarrow e^{-jk\omega} X(e^{j\omega})$

**Frequency-shifting.** There is a kernel term in signal e.g.,  $e^{j\omega_n n} x[n] \leftrightarrow X(e^{j(\omega-\omega_k)})$

**Conjugate symmetry.**

$$x^*[n] \leftrightarrow X^*(e^{-j\omega})$$

If  $x[n] \in \mathbb{R}$ , then

$$X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$$

$$|X(e^{j\omega})| = |X(e^{-j\omega})|$$

$$\angle X(e^{j\omega}) = -\angle X(e^{-j\omega})$$

If  $x[n] \in \mathbb{C}$  and even, then  $X(e^{j\omega}) \in \mathbb{R}$  and even.

If  $x[n] \in \mathbb{C}$  and odd, then  $X(e^{j\omega})$  purely  $\in \mathbb{C}$  and odd.

**Time reversal.** Transform variable is reversed, e.g.,  $x[-n] \leftrightarrow X(e^{-j\omega})$

**Differentiation.** In time and frequency domain, e.g.,

$$x[n] - x[n-1] \leftrightarrow (1 - e^{-j\omega}) X(e^{j\omega})$$

$$nx[n] \leftrightarrow j \frac{d}{d\omega} X(e^{j\omega})$$

**Duality.** Convolution property: convolution in time domain corresponds multiplication in transform domain

$$x_1[n] \otimes x_2[n] \leftrightarrow X_1(e^{j\omega}) \cdot X_2(e^{j\omega})$$

and multiplication property: vice versa

$$x_1[n] \cdot x_2 \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi}^{2\pi} X_1(e^{j\theta}) X_2(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$

**Parseval's relation.** Energy in signal and spectral components:

$$\sum |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi}^{2\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

**Integral transforms**

Definitions given in first two lines of each type. Some common pairs as well as properties are listed. See math reference book for complete tables.

**Fourier-series of continuous-time periodic signals:**

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$x(t - t_0) \leftrightarrow a_k e^{j k \Omega_0 t_0}$$

$$e^{j M \Omega_0 t} x(t) \leftrightarrow a_{k-M}$$

$$\int_T^\infty x_a(\tau) x_b(t-\tau) d\tau \leftrightarrow T a_k b_k$$

$$x_a(t) x_b(t) \leftrightarrow \sum_k a_k b_{k-l}$$

$$\frac{d}{dt} x(t) \leftrightarrow j k \Omega_0 a_k$$

Fourier-series of discrete-time periodic sequences:

$$x[n] = \sum_{k=(N)} a_k e^{j k \omega_0 n}, \quad x[n] \text{ periodic with } N_0$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=(N)} x[n] e^{-j k \omega_0 n}, \quad a_k \text{ periodic with } N_0$$

$$x[n-M] \leftrightarrow a_k e^{j k \omega_0 M}$$

$$e^{j M \omega_0 n} x[n] \leftrightarrow a_{k-M}$$

Continuous-time Fourier-transform (CTFT):

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega$$

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt$$

$$x(t-t_k) \leftrightarrow e^{j\Omega t_k} X(j\Omega)$$

$$e^{j\Omega k t} x(t) \leftrightarrow X(j(\Omega - \Omega_k))$$

$$x_a(t) \oplus x_b(t) \leftrightarrow X_a(j\Omega) X_b(j\Omega)$$

$$x_a(t) x_b(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X_a(j\Omega) \otimes X_b(j\Omega)$$

$$\cos(\Omega_0 t) \leftrightarrow \pi[\delta(\Omega - \Omega_0) + \delta(\Omega + \Omega_0)]$$

$$\sin(\Omega_0 t) \leftrightarrow j\pi[\delta(\Omega + \Omega_0) - \delta(\Omega - \Omega_0)]$$

$$x(t) = 1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\Omega)$$

$$x(t) = \begin{cases} 1, |t| < T_1 \\ 0, |t| > T_1 \end{cases} \leftrightarrow \frac{2\sin(\Omega T_1)}{\Omega}$$

$$\frac{\sin(Wt)}{\pi t} \leftrightarrow X(j\Omega) = \begin{cases} 1, |\Omega| < W \\ 0, |\Omega| > W \end{cases}$$

$$\delta(t) \leftrightarrow 1$$

$$\delta(t - t_k) \leftrightarrow e^{j\Omega t_k}$$

$$e^{-at} \mu(t) \leftrightarrow \frac{1}{a+j\Omega}, \text{ where } \text{Re}al\{a\} > 0$$

Discrete-time Fourier-transform (DTFT):

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{jn\omega} d\omega$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jn\omega}, \quad X(e^{j\omega}) \text{ periodic } 2\pi$$

$$x[n-k] \leftrightarrow e^{-jk\omega} X(e^{j\omega})$$

$$e^{jk\omega n} x[n] \leftrightarrow X(e^{j(\omega - \omega_k)})$$

$$x_1[n] \otimes x_2[n] \leftrightarrow X_1(e^{j(\omega - \omega_k)})$$

$$x_1[n] \cdot x_2 \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi}^{2\pi} X_1(e^{j\theta}) X_2(e^{j(\omega - \theta)}) d\theta$$

$$nx[n] \leftrightarrow j \frac{d}{d\omega} X(e^{j\omega})$$

$$e^{j\omega_0 n} \leftrightarrow 2\pi \sum_l \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l)$$

$$\cos(\omega_0 n) \leftrightarrow \pi \sum_l [\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l) + \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi l)]$$

$$\sin(\omega_0 n) \leftrightarrow j\pi \sum_l [\delta(\omega + \omega_0 - 2\pi l) + \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l)]$$

$$x[n] = \begin{cases} 1, |n| \leq N_1 \\ 0, |n| > N_1 \end{cases} \leftrightarrow \frac{\sin(\omega(N_1+0.5))}{\sin(\omega/2)}$$

$$\frac{\sin(Wn)}{\pi n} = \frac{W}{\pi} \sin(\frac{Wn}{\pi}) \leftrightarrow \dots$$

$$\dots X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & 0 \leq |\omega| \leq W \\ 0, & W < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

$$\delta[n] \leftrightarrow 1$$

$$\delta[n-k] \leftrightarrow e^{-jk\omega}$$

$$a^n \mu[n] \leftrightarrow \frac{1}{1-a} e^{-jn\omega}$$

$$W_n = e^{-j2\pi/N}$$

Connection to DFT/T:  $X[k] = X(e^{j\omega})|_{\omega=2\pi k/N}$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-kn}, \quad 0 \leq k \leq N-1$$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}, \quad 0 \leq k \leq N-1$$

Laplace transform:

Convergence with a certain ROC (region of convergence). Connection to continuous-time Fourier-transform:  $s = j\Omega$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s) e^{st} ds$$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

**z-transform:**

Convergence with a certain ROC (region of convergence). Connection to discrete-time Fourier-transform:  $z = e^{j\omega}$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z) z^{n-1} dz$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

$$x[n] \otimes x_2[n] \leftrightarrow X_1(z) \cdot X_2(z)$$

$$\delta[n] \leftrightarrow 1, \quad \text{ROC all } z$$

$$\delta[n-k] \leftrightarrow z^{-k}, \quad \text{all } z, \text{ except } 0 \ (k > 0) \text{ or } \infty \ (k < 0)$$

$$[d[n] \leftrightarrow \frac{1}{1-a z^{-1}}, \quad |z| > 1]$$

$$-[\mu[-n-1] \leftrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}}, \quad |z| < 1]$$

$$a^n \mu[n] \leftrightarrow \frac{1}{1-a z^{-1}}, \quad |z| > |a|$$

$$n a^n \mu[n] \leftrightarrow \frac{1}{(1-a z^{-1})^2}, \quad |z| > |a|$$

$$(n+1) a^n \mu[n] \leftrightarrow \frac{1}{(1-a z^{-1})^2}, \quad |z| > |a|$$

$$r^n \cos(\omega_0 n) \mu[n] \leftrightarrow \frac{1-r \cos(\omega_0 z^{-1})}{1-2r \cos(\omega_0 z^{-1}) + r^2 z^{-2}}, \quad |z| > |r|$$

$$r^n \sin(\omega_0 n) \mu[n] \leftrightarrow \frac{r \sin(\omega_0 z^{-1})}{1-2r \cos(\omega_0 z^{-1}) + r^2 z^{-2}}, \quad |z| > |r|$$

LTI system analysis

Unit step response

$$s[n] = \sum_{k=-\infty}^n h[k]$$

Frequency, magnitude/amplitude, phase response

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\angle H(e^{j\omega})}$$

$$H(e^{j\omega}) = H(z)|_{z=e^{j\omega}}$$

$$H[k] = H(e^{j\omega})|_{\omega=2\pi k/N}$$

Group delay

$$\tau(\omega) = -\frac{d}{d\omega} \angle H(e^{j\omega})$$

Important transform pairs and properties

$$a \delta[n-k] \leftrightarrow a e^{-jk\omega} \leftrightarrow a z^{-k}$$

$$a^n \mu[n] \leftrightarrow 1/[1 - a e^{-j\omega}] \leftrightarrow 1/[1 - a z^{-1}]$$

$$a x[n-k] \leftrightarrow a e^{-jk\omega} X(e^{j\omega}) \leftrightarrow a z^{-k} X(z)$$

$$y[n] = h[n] \otimes x[n] \leftrightarrow Y(z) = H(z) \cdot X(z)$$

Filter design

Bilinear transform and prewarping

$$s = k \cdot (1 - z^{-1}) / (1 + z^{-1}), \quad k = 1 \text{ or } k = 2/T$$

$$\Omega_{prewarp,c} = k \cdot \tan(\omega_c/2), \quad k = 1 \text{ or } k = 2/T$$

Window method

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & |\omega| \geq \omega_c \end{cases} \leftrightarrow \dots$$

$$\dots [h[n] = \frac{\sin(\omega e^{jn\omega})}{\pi n} = \frac{\omega}{\pi} \sin(\frac{\omega n}{\pi})]$$

$$h_{FIR}[n] = h_{ideal}[n] \cdot w[n]$$

$$H_{FIR}(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_{ideal}(e^{j\theta}) W(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$

Multirate systems

Upsampling with  $L$

$$x_u[n] = \begin{cases} x[n/L], & n = 0, \pm L, \pm 2L, \dots \\ x_u[n] = 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$X_u(z) = X(z^L)$$

Downsampling with  $M$

$$x_d[n] = x[nM]$$

$$X_d(z) = (1/M) \sum_{k=0}^{M-1} X(z^{1/M} W_{M,M}^{-k})$$