Institutionen för matematik
Tekniska högskolan

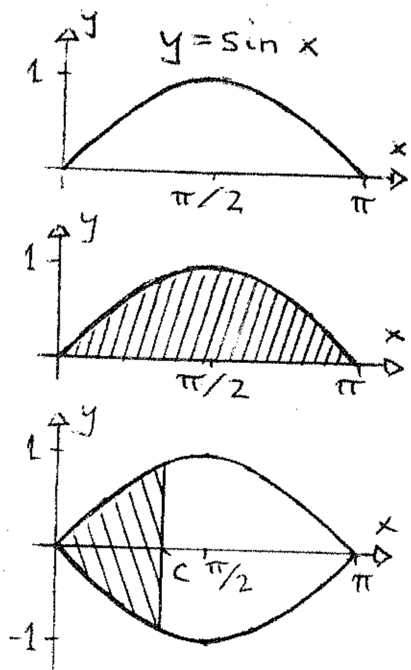
Metsalo

Mat-1.1510 Svenskspråkig grundkurs i matematik 1

Mellanförhör nr 3, 19.12.2006

Fyll i tydligt *på varje svarpapper* samtliga uppgifter. På *förhörskod och -namn* skriv kursens kod, namn samt *slutförhör* eller *mellanförhör* med ordningsnummer. Utbildningsprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Vid detta mellanförhör får vanliga funktionsräknare användas. Tabellsamlingar och mer avancerade räknare får inte användas. Om ni misstänker att det förekommer något tryckfel, fråga!



1.
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x-1} & , x \neq 0 \\ a & ; x = 0 \end{cases}$$

a) Bestäm parametern a så att f blir kontinuerlig i origo.
b) Visa att med detta värde på a blir funktionen f även differentierbar i origo och bestäm $f'(0)$ i det fallet.

2. Beräkna arean A hos den rotationssymmetriska ytan, som uppstår då kurvan $y = \sin x, 0 \leq x \leq \pi$ i den övre figuren roterar kring x-axeln.

3. a) Beräkna volymen V hos kroppen, som uppstår då det i den mittersta figuren skuggade området, som begränsas av kurvan $y = \sin x, 0 \leq x \leq \pi$ och x-axeln roterar kring x-axeln. (Kroppens begränsningsyta är ytan i uppgift 2 ovan.)
b) Vi försöker nu bestämma talet c så att den delen av kroppen i a)-delen, som finns till vänster om planet $x = c$, har en tredjedel av kroppens totala volym V. Ur den nedre figuren ses lätt att $\pi/3 < c < \pi/2$. Bilda hjälpfunktionen $g(c) =$ (Volymen hos den delen av kroppen, som finns till vänster om planet $x = c$)− (Totala volymen V)/3. Då söker vi g:s nollställe i intervallet. Använd Newtons metod för att approximera g:s nollställe med begynnelsevärdet $c_0 = \pi/3$ och iterera en gång.

4. a) En ordinär differentialekvation (ODE) på formen $z'(x) + p(x) \cdot z(x) = q(x)$, där p och q är givna funktioner och z är en sökt funktion, kallas för en 1:a ordningens *linjär* ODE. En ODE på formen $y'(x) + f(x) \cdot y(x) = g(x) \cdot (y(x))^\alpha$, där f och g är givna funktioner, $\alpha \neq 1$ är en given konstant och y en sökt funktion, kallas för en *Bernoulli-ekvation*. Visa att en Bernoulli-ekvation kan omvandlas till en 1:a ordningens linjär ODE genom att införa en ny sökt funktion z via $z(x) = (y(x))^{1-\alpha}$ och därefter förenkla den nya differentialekvationen för den nya funktionen z, som man därvid får.
b) Lös Bernoulli-ekvationen $y'(x) + x \cdot y(x) = x/\sqrt{y(x)}$ med begynnelsevillkoret $y(0) = 4$.

Nyttiga (?) formler:
$\cos^2 t + \sin^2 t = 1, \sin(2t) = 2 \sin t \cos t, \cos(2t) = \cos^2 t - \sin^2 t$
$\Rightarrow \cos^2 t = (1 + \cos(2t))/2, \sin^2 t = (1 - \cos(2t))/2$
$\int \sqrt{t^2 + a^2} dt = \frac{t}{2} \cdot \sqrt{t^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \cdot \ln(t + \sqrt{t^2 + a^2}) + C.$

Glöm inte att lämna in kursutvärderingarna till studiechefen. God Jul och Gott Nytt År!