

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin kysytyt tiedot!

Koulutusohjelmahenteeet: AUT, BIO, EST, GMA, INF, KEM, KON, KTA, MAK, MAR, PUU, RYK, TFY, TLT, TIK, TUO

1. Olkoon  $C^2([a, b])$  välillä  $[a, b]$  määriteltyjen reaaliarvoisten, kahdesti jatkuvasti derivoituvien funktioiden muodostama vektoriavaruus. Onko joukko

$$S = \{f \in C^2([a, b]) \mid f''(x) + f(x) = 0, \text{ kaikilla } x \in [a, b]\}$$

$C^2([a, b])$ :n vektoriavaruus? Perustelee.

2. Olkoon  $P_2$  enintään astetta 2 olevien yhden reaaliuuttujan reaaliilukukertoimisten polynomien muodostama vektoriavaruus.

(a) Osoita, että ehdon

$$(Dp)(x) = 2p(x) + p'(x) - 5p''(x)$$

määrittämä kuvaus  $D : P_2 \rightarrow P_2$ ,  $p \in P_2$ ,  $x \in \mathbb{R}$  on lineaarinen.

- (b) Muodosta kuvauksen  $D$  matriisi  $P_2$ :n tavallisen kannan  $\{p_0, p_1, p_2\}$  suhteen, missä  $p_0(x) \equiv 1$ ,  $p_1(x) = x$ ,  $p_2(x) = x^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

(c) Onko  $D$  kääntövä? Miksi?

3. Määrää matriisin

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

- (a) sarakeavaruudelle  $\text{Col}(A)$  kanta,  
 (b)  $\text{Rank}(A)$ ,  
 (c) nolla-avaruuden  $\text{Nul}(A)$  dimensio,  
 (d) nolla-avaruudelle  $\text{Nul}(A)$  kanta.

4. Olkoon  $C^0([-1, 1])$  välillä  $[-1, 1]$  määriteltyjen reaaliarvoisten, jatkuvien funktioiden muodostama vektoriavaruus varustettuna sisätulolla

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx.$$

- (a) Mitkä polynomeista  $p_n : p_n(x) = x^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  ovat kohtisuorassa vastakompolynomia  $p_0 : p_0(x) \equiv 1$  vastaan?  
 (b) Määrää polynomien  $p_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  pituus.