

Mat-1.1132 Matematiikan peruskurssi C3-II Eloranta/Kangaslampi

Tentti, 19.12.2006

Merkitse paperiin selvästi: C3-II, tentti, päivämäärä, nimi, osasto, opintokirjan numero ja allekirjoituksesi.
Kokeessa ei saa käyttää taulukoita eikä laskimia. Perustele vastauksesi!

Tehtävä 1. Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 6 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix}.$$

- Käännä A Gauss-Jordanin menetelmällä.
- Laske matriisin $A - 12I$ rangi. Laske matriisin ominaisarvot.

Tehtävä 2. Mitä tekee kukin matriisiesta

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos \phi & 0 & -\sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \phi & 0 & \cos \phi \end{pmatrix} \text{ ja } \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

\mathbb{R}^3 :n vektoreille? Ovatko ne ortogonaalisia? Esitä niiden avulla kuvaus, joka vie vektorin $(0 \ 1 \ 1)^T$ vastavektoriin $(0 \ -1 \ -1)^T$. Kerro (ja piirrä myös kuva siitä), miten viet vektorin $(1 \ 1 \ 1)^T$ vastavektoriin ja laske sitten tämän operaation matriisi.

Tehtävä 3. Ratkaise matriisin

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- spektri ja ominaisvektorit sekä esitä diagonalisointi.
- Laske matriisin rivi- ja sarakesummanormit.

Tehtävä 4. Ratkaise systeemi $\dot{y} = Ay$, jossa

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Mikä on origon dynaaminen tyyppi? Onko systeemi stabiili siinä? Entä asympotoottisesti stabiili?

Tehtävä 5. Laske kun $\omega \neq 0$ a. $\mathcal{L}(e^{at} \sin \omega t)$ ja b. $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2 + \omega^2)}\right)$.