Teknillinen korkeakoulu

Mat-1.1010 Matematiikan peruskurssi L1

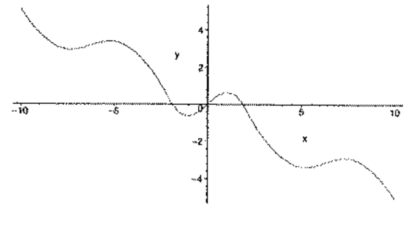
3. välikoe 19.12.2006 klo 9–12.
Täytä huolellisesti kaikki vaaditut tiedot jokaiseen vastauspaperiin.
Huom: Ei laskimia eikä taulukoita!

1. Funktio $\tanh\colon \mathbf{R} \to (-1,1)$, $\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$, on aidosti kasvava bijektio.
   a) Johda käänteisfunktion lauseke $\operatorname{artanh} x = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.
   b) Laske $D(\operatorname{artanh} x)$, kehitä tulos sarjaksi ja määritä tämän avulla artanh-funktion Taylor-sarja pisteessä $x_0 = 0$.

2. a) Funktio $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ on jatkuva ja $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$. Osoita, että funktiolla f on (ainakin yksi) minimi joukossa $\mathbf{R}$.
   b) Funktio $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ määritellään asettamalla $g(x) = \begin{cases} x^2, & \text{kun } x \in \mathbf{Q}, \\ 0, & \text{kun } x \notin \mathbf{Q}. \end{cases}$
   Osoita, että g on derivoituva pisteessä $x = 0$, mutta epäjatkuva kaikissa muissa pisteissä $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.
   Huom: Tehtävässä saa (= täytyy) käyttää kurssilla esitettyjä perustuloksia.

3. a) Osoita, että yhtälöllä $\tan x = 1/x$ on yksikäsitteinen ratkaisu välillä $0 < x < \pi/2$.
   b) Määritä ratkaisun likiarvo korvaamalla $\tan x$ sen Taylor-polynomilla $T_3(x,0)$.
   c) Kirjoita yhtälö kiintopisteyhtälönä sellaisessa muodossa, että iteraatio suppenee (perustelu!) ja iteroi kaksi askelta alkuarvosta $x_0 = 1$.

4. Osoita, että yhtälö $2\sin x + \sin y = x + 2y$ määrittelee yksikäsitteisen implisiittifunktion $y\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Määritä funktion $y = y(x)$ ensimmäinen paikallinen ääriarvokohta x_0 alueessa $x > 0$ ja selvitä sen laatu.
   Huom: Kuviosta voi katsoa vihjeitä, mutta siihen vetoaminen ei kelpaa perusteluksi! Ääriarvoa $y_0 = y(x_0)$ ei tarvitse laskea.



Provet på svenska: Vänd!

Tekniska högskolan
Mat-1.1010 Grundkurs i matematik L1

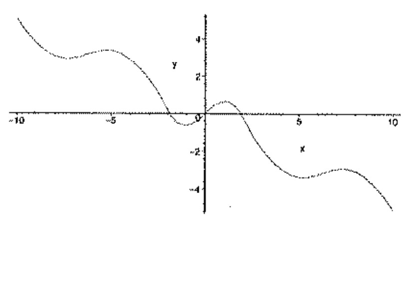
3. mellanförhöret 19.12.2006 kl. 9–12.
Fyll i all krävd information på alla svarspapper.
Obs: Inga kalkylatorer eller tabeller!

1. Funktionen $\tanh\colon \mathbf{R} \to (-1,1)$, $\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$, är strängt växande och bijektiv.
   a) Härled formeln $\operatorname{artanh} x = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ för den inversa funktionen.
   b) Beräkna $D(\operatorname{artanh} x)$, utveckla den som en serie, och bestäm med hjälp av det här resultatet Taylor-serien av funktionen artanh i punkten $x_0 = 0$.

2. a) Funktionen $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ är kontinuerlig och $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$. Visa att funktionen f har (minst) ett minimum i mängden $\mathbf{R}$.
   b) Funktionen $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definieras genom att sätta $g(x) = \begin{cases} x^2, & \text{då } x \in \mathbf{Q}, \\ 0, & \text{då } x \notin \mathbf{Q}. \end{cases}$
   Visa att g är deriverbar i punkten $x = 0$, men diskontinuerlig i alla andra punkten $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.
   Obs: Man får (= måste) använda några basresultat presenterade i kursen.

3. a) Visa att ekvationen $\tan x = 1/x$ har en unik lösning i intervallet $0 < x < \pi/2$.
   b) Bestäm lösningens närmevärde genom att substituera Taylor-polynomen $T_3(x,0)$ i stället av $\tan x$.
   c) Skriva ekvationen på formen av en fixpunktekvation, så att iterationen konvergerar (motivering!) och iterera två steg från begynnelsevärdet $x_0 = 1$.

4. Visa att ekvationen $2\sin x + \sin y = x + 2y$ definierar en entydig implicitfunktion $y\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Bestäm funktionens $y = y(x)$ första lokala extrempunkt x_0 i området $x > 0$ och undersök dess typ.
   Obs: Man får några tips från bilden, men de gäller inte som en bevis! Extremvärdet $y_0 = y(x_0)$ behöver inte beräknas.



Koe suomeksi: Käännä!