Matematiikan laitos
Teknillinen korkeakoulu

Malinen – Ruotsalainen

Mat-1.1210 Matematiikan peruskurssi S1

3. välikoe 19.12.2006

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kuulustelukoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. $\star$-kohta jätetään tyhjäksi. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, EST, INF, KEM, KON, MAA, MAK, MAR, PUU, RYK, TFY, TIK, TLT, TUO.

Kokeessa saa käyttää funktiolaskinta, ei muita apuvälineitä. Koeaika on 3h.

1. a) Määritä $\lim_{x\to\infty}(x^2 - x^2\cos\frac{1}{x})$

   b) Kirjoita neljännen asteen Taylorin polynomi funktiolle $f(x) = \ln(1-x)$ kehityskeskipisteenä $x = 0$. Laske tämän avulla
$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\ln(1-x)}.$$
   Tarkista tuloksesi l'Hospitalin säännöllä (kirjoita tarkistuksesi vastauspaperiin).

2. a) Ratkaise likimääräisesti yhtälö $\ln(x) + 2x + 1 = 0$ Newtonin menetelmällä siten, että virhe on itseisarvoltaan korkeintaan 10^{-6}. Alkuarvona voit käyttää $x_0 = 0.5$.

   b) Laske osittaisintegroimalla
$$\int_0^{\pi} x^2 \sin x \cos x \, dx\,.$$

3. Laske määrämätön integraali (antiderivaatta)
$$\int \frac{x^5 - x^4 - 4x^3 - x^2 - 6x + 7}{x^3 - x^2 - 4x - 6}dx\,.$$
   Vihje: Nimittäjä $Q(x)$ voidaan kirjoittaa muotoon $Q(x) = (x-3)(x^2+2x+2)$.

4. Ratkaise Laplace-muunnoksen avulla alkuarvotehtävä $x'(t) - 9x(t) = \sin 2t$, $x(0) = 0$.

   Vihje: Tarvittavia Laplace-muunnoskaavoja koepaperin kääntöpuolella.

Funktio $f(t), t \geq 0$	**Laplace-muunnos** $\hat{f}(s)$
1	$\frac{1}{s}$ kun $s > 0$
e^{ax}	$\frac{1}{s-a}$ kun $s > \max(0, a)$
$\sin bx; \quad b \in \mathbb{R}$	$\frac{b}{s^2+b^2}$ kun $s > 0$
$\cos bx; \quad b \in \mathbb{R}$	$\frac{s}{s^2+b^2}$ kun $s > 0$
$x^n; \quad n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$ kun $s > 0$
$x^n e^{ax}; \quad n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$ kun $s > \max(0, a)$
$e^{ax} \sin bx; \quad a, b \in \mathbb{R}$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$ kun $s > 0$
$e^{ax} \cos bx; \quad a, b \in \mathbb{R}$	$\frac{x-a}{(s-a)^2+b^2}$ kun $s > 0.$