Tentti joulukuu 2006.

Tehtävä 1. a) Määrittele kartion $K$ polaarikartio $K^\circ$.

b) Olkoot $p$, pisteen $x$ projektio konveksille kartiolle $K$. Osoita, että jos $\langle x-p, y-p\rangle \le 0$, $\forall y \in K$, niin $x-p \in K^\circ$.

Tehtävä 2. a) Määrittele konveksin joukon ekstreemi piste.

b) Osoita, että mikäli joukko $C$ on konveksi ja kompakti, niin kuvauksen $f(x) = \|x\|^2$, maksimikohta $x^*$ joukossa $C$ on samalla $C$:n ekstreemi piste.

Tehtävä 3. Olkoot $A$ positiivisesti definiitti matriisi, eli $A \in \mathbb{S}^n_{++}$. Osoita, että pätee: $A + A^{-1} \succeq 2I$.

Tehtävä 4. Oletamme, että $X$ on symmetrinen ja positiivisesti definiitti matriisi, eli $X \succ 0$. Määritä funktion $f(X) = tr(AX) + tr(BX^{-1})$ minimi, kun sekä $A \succ 0$ että $B \succ 0$ ovat symmetrisiä ja positiivisesti definiittejä matriiseja.

Tehtävä 5. Olkoot $w \in \mathbb{R}^2_+$ ja funktio $f = \max\{f_1, f_2, f_3\}$. Tehtävänä on määrittää kartio $K$, missä $s \in K$ siten, että seuraavalla tehtävällä on ratkaisu:

$$\begin{array}{ll} \min_w & f(w) \\ \text{s.e.} & \langle s, w\rangle \ge 0, \end{array}$$

kun $f_1(w) = \dfrac{w_1^2}{2} + w_2^2$, $f_2(w) = w_1^2 + \dfrac{w_2^2}{2}$ ja $f_3(w) = 2w_1 + w_2$.