Mat-1.2600 Sovellettu todennäköisyyslaskenta A

Tentti ja syksyn 2005 kurssin välikokeiden uusinnat 07.01.2006/Mellin

Kirjoita *selvästi jokaiseen koepaperiin* alla mainitussa järjestyksessä:

- Mat-1.2600 SovTnA 1.vk/2.vk/tentti 07.01.2006
- opiskelijanumero + kirjain
- TEKSTATEN sukunimi ja kaikki etunimet
- koulutusohjelma ja vuosikurssi
- mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat
- nimikirjoitus

Lue tarkasti seuraavat ohjeet:

(1) Jos olet *uusimassa* 1. *välikoetta*, vastaa kysymyksiin 1-3.

(2) Jos olet *uusimassa* 2. *välikoetta*, vastaa kysymyksiin 4-7.

(3) Jos olet *suorittamassa kurssia tentillä*, vastaa kysymyksiin 1-2 ja 5-7.

Sallitut apuvälineet: *Funktiolaskin* ja Lainisen ja/tai Mellinin *kaava-* ja *taulukko-kokoelma*.

Vastaa *lyhyesti* ja *ytimekkäästi*, mutta *perustele ratkaisusi*. Esimerkiksi pelkkä lukuarvo vastauksena *ei riitä* täysiin pisteisiin.

1. (a) Olkoon $\Pr(A) = 0.4$ ja $\Pr(B) = 0.6$. Määrää $\Pr(A \cup B)$, jos

(1) A ja B ovat riippumattomia

(2) $\Pr(B|A) = 0.2$

(3) $\Pr(B \cap A) = 0.2$

(4) A ja B ovat toisensa poissulkevia

(b) Todista Kolmogorovin aksioomista lähtien yleinen yhteenlaskusääntö:

Olkoon $(S, \Pr, F)$ todennäköisyyskenttä, jossa F on otosavaruuden S osajoukoille määritelty σ-algebra ja Pr on σ-algebran F osajoukoille määritelty todennäköisyysmitta. Jos

$$A \in F, B \in F$$

niin tällöin

$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$$

2. (a) Uurnassa on 5 punaista ja 4 sinistä kuulaa. Uurnasta poimitaan 4 kuulaa satunnaisesti. Mikä on todennäköisyys saada täsmälleen 2 sinistä kuulaa, kun poiminta tapahtuu ilman takaisinpanoa (palauttamatta)?

(b) Erään liikeyrityksen puhelinkeskukseen tulevien puheluiden lukumäärä noudattaa Poisson-jakaumaa niin, että keskukseen tulee keskimäärin 60 puhelua tunnissa.

Mikä on todennäköisyys, että keskukseen tulee kahdeksan tunnin työpäivän aikana korkeintaan 500 puhelua?

3. (a) Uurnassa on 5 punaista ja 4 sinistä kuulaa. Uurnasta poimitaan 4 kuulaa satunnaisesti. Mikä on todennäköisyys saada täsmälleen 2 sinistä kuulaa, kun poiminta tapahtuu takaisinpanolla (palauttaen)?

(b) Heität virheetöntä noppaa 12000 kertaa.

Mikä on todennäköisyys, että kuutosten lukumäärä on suljetulla välillä [1930,2050]?

4. Johda ensin eksponenttijakauman momenttiemäfunktio ja sitten *momenttiemäfunktion avulla* jakauman varianssi.

Eksponenttijakauman Exp(λ) tiheysfunktio:

$$f(x) = \lambda \exp(-\lambda x)\,,\ \lambda > 0\,,\ x \geq 0$$

5. Oletetaan, että satunnaismuuttujat X ja Y ovat riippumattomia ja noudattavat samaa eksponenttijakaumaa. Todista, että satunnaismuuttuja

$$Z = \min\{X,Y\}$$

noudattaa eksponenttijakaumaa. Mikä on jakauman parametri?

Eksponenttijakauman Exp(λ) tiheysfunktio:

$$f(x) = \lambda \exp(-\lambda x)\,,\ \lambda > 0\,,\ x \geq 0$$

6. (a) Eräässä lääketieteellisessä kokeessa tutkittiin uuden rautalääkkeen vaikutusta veren hemoglobiinipitoisuuteen. Kokeeseen valittiin satunnaisesti 10 henkilöä, joiden veren hemoglobiini mitattiin ennen kahden viikon lääkekuuria ja sen jälkeen. Mittaustulokset on annettu alla olevassa taulukossa.

Henkilö	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ennen	140	145	130	138	142	150	144	135	142	133
Jälkeen	141	144	133	140	141	152	148	139	145	139

Testaa 1 %:n merkitsevyystasoa käyttäen nollahypoteesia, että lääke ei vaikuta veren hemoglobiinipitoisuuteen, kun vaihtoehtoisena hypoteesina on, että lääke nostaa hemoglobiinipitoisuutta.

(b) Kyselytutkimuksessa haluttiin verrata puolueen X kannatusta alueilla A ja B. Tutkimus toteutettiin seuraavalla tavalla: Alueen A äänioikeutettujen joukosta poimittiin yksinkertainen satunnaisotos, jonka koko oli 300 ja alueen B äänioikeutettujen joukosta poimittiin yksinkertainen satunnaisotos, jonka koko oli 400. Lisäksi otokset olivat riippumattomia.

Puolueen X kannattajia oli alueelta A poimitussa otoksessa 75 ja alueelta B poimitussa otoksessa 120.

Testaa 1 %:n merkitsevyystasoa käyttäen nollahypoteesia, että puolueen X kannattajien suhteellinen osuus on alueella A ja B sama, kun vaihtoehtoisena hypoteesina on, että puolueen X kannattajien suhteellinen osuus alueilla A ja B ei ole sama.

7 (a) Alla olevassa taulukossa on annettu pieni muuttujia x ja y koskeva havaintoaineisto. Oletetaan, että aineistosta estimoidaan pienimmän neliösumman menetelmällä lineaarinen regressiomalli, jossa y on selitettävänä muuttujana ja x selittävänä muuttujana. Lisäksi mallissa on mukana vakio.

Määrää estimoidun mallin residuaali pisteessä $x = -2$.

i	x_i	y_i
1	−2	2
2	0	1
3	1	1
4	2	0
5	4	−1

(b) Olkoon

$$y = 4x - 2$$

muuttujan x (estimoidun) regressiosuoran yhtälö muuttujan y suhteen ja

$$y = x + 1$$

muuttujan y (estimoidun) regressiosuoran yhtälö muuttujan x suhteen.

Määrää muuttujien x ja y aritmeettiset keskiarvot ja molempien mallien selitysasteet.